УДК 510.6

ДИАЛЕКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РАЗВИТИЯ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Титов А. В.

Аннотация: *В своих трудах Гегель исходит из предпосылки, что истина познается только научным путем, при этом, необходимым образом встает вопрос о том, что есть наука, и новый взгляд на понятие науки предъявляет новые требования к ее образу. В XX веке к такому же выводу стали приходить математики: представители и «чистой» математики, и, в еще большей степени, те, кто занят приложением математики к описанию сущностей разной природы. В 1990 году эту тему поднимает В.В.Налимов в статье «Требование к изменению образа науки».*

Критика Гегелем такого подхода к систематизации философского знания, который основан на привлечении методологии, выработанной в математике, оправдана. В ней хорошо видно его предупреждение о том, что методы, принятые в математике, накладывают ограничения на возможность описания сущностей. В отличие от эвристического, основанного на развитой научной и наукометрической интуиции осознания ограниченности рациональных методов описания математиками, Гегель выстраивает другую систему научного знания - науку логики, в которой обоснованно вскрываются недостатки принятых в математике и в науке в целом методов.

В предлагаемой работе исследуется вопрос о расширении возможностей математического описания различного рода явлений и сущностей, о пути развития этих возможностей, об исследовании возможностей описания в разных областях знания. В том числе, для использования ее средств в развитии типов формальной логики.

Ключевые слова: *эйдос, схема, символ, миф, логос, логическая конструкция эйдоса, диалектика, математические структуры, нестандартный анализ, оценка, категория, истинность.*

В богословской критике античной философии и науки, в частности, в трудах Иоанна Златоуста, одним из основных аргументов является то, что философия является внешней мудростью, оперирующей только явлениями видимого мира. И по этой причине не способной обратиться к Истине. Г.В.Ф. Гегель во многом с этим соглашается, однако принципиально является сторонником именно научного знания, противопоставляя его знанию «непосредственному». При этом он определяет и новый образ науки. В этом новом образе наука не может, по его словам, ограничиваться только внешней рефлексией, не может довольствоваться только созерцанием и откровением. Согласно этому подходу, путем к синтезу различных форм знания, придания им единства может служить диалектика.

В своей философии имени А.Ф. Лосев ставит задачи диалектического анализа слова и имени и разделения наук о мышлении. Разделение, проводимое в работе Лосева на основе анализа видов логической конструкции эйдоса, позволяет не только анализировать различные виды знания и их сущность, но и прослеживать взаимную связь этих видов знания и рассматривать отдельные виды имеющихся знаний (в частности математику) в их развитии.

Для того, чтобы единство математики не терялось, в ее развитии необходима единая философская основа, которая могла бы послужить базой для объяснения процессов развития математики. Такой основой, по мнению автора данной статьи, может служить развиваемый в работах Гегеля и А.Ф. Лосева диалектический подход, т.е. предлагается рассматривать процесс развития математики и формирования ее понятий как определенную в «Диалектических основах математики» А.Ф.Лосева диалектику антитезы чистой математики и математического естествознания.

Математика как язык
и как средство описания уровней бытия данных как эйдос

В работе «Философия имени» А.Ф. Лосев выделяет пять уровней эйдетической предметности [1, с.161].

В созерцательном феноменолого-статистическом аспекте:

- Схема - схематический слой эйдоса или множество в смысле Кантора, выражающий составленность целого из частей. Идея охватывающего части целого выходит за пределы частей. «Это - совокупность идеально -математических характеристик предмета» [1,с. 110];
- Топос - момент качественной определенности эйдоса или качественная заполненность схемы, морфный или топологический момент;
- Эйдос в узком смысле - или момент категориальной определенности эйдоса;
- Символ - воплощенность эйдоса в инобытии, смысловая вобранность инобытия в эйдос, что обуславливает его апофатичность;
- Миф - интеллигентно модифицированный миф [там же]

В диалектико-динамическом аспекте:

- Генологический момент;
- Эйдетический в узком смысле;
- Генетический;
- Меонально – сущностный или гилетический;
- Символический [там же]

В этом выделении уровней эйдоса математике отводится место схемы в жизни эйдоса. Однако, А.Ф. Лосев предвидел развитие математики в сторону освоения более глубоких уровней эйдоса: «Морфе, или топос, отличается от схемы тем, что она принимает во внимание и качество, топос частей, слагающихся в целое....Если к этому прибавить еще и качественное содержание каждого элемента или части, то получилось бы новое и более богатое учение о схеме, и недалеко то будущее, которое даст такую науку как необходимую часть науки о множествах или его применений к другим областям» [1, 110].

Признаки такой науки в развивающейся математике уже налицо; к ней можно отнести любой раздел математики, в котором элементом множества является структура, т.е.: топологию, топологию гиперпространств, нестандартный анализ, теорию нечетких множеств, в которой число обретает вид функции принадлежности и т.д. Но, как отмечает Лосев, каждый более простой уровень эйдоса функционирует на фоне эйдоса более фундаментального уровня и все уровни составляют единство.

Возможные формы формальной логики не исчерпываются классической булевой логикой с законами исключенного третьего и противоречия. Уровни эйдоса не только обладают по мере углубления все более насыщенной структурой, но в них, начиная с символического уровня, развивается момент апофатичности, а значит и их логос, или определенный вид их логоса, должен отражать этот момент в форме изменения законов формальной логики. Это обстоятельство порождает потребность поиска в самой математике инструментов естественного генерирования различных видов формально-логического исчисления. Как будет показано ниже, такой основой может служить обобщенный нестандартный анализ как раздел теории категорий, и понятие оценки как объект этого анализа. Дальнейшее развитие может быть связано с более широким использованием теории категорий.

Диалектические аспекты в развитии математики

Современная математика по природе своей вступает в конфликт с методами познания, принятыми в естествознании. Ее объекты и правила вывода порождены сознанием, а не внешним опытом. Это подтверждается и в работах ведущих математиков, в частности новое понимание формальной логики, расширяющее ее понимание как анализа типов рассуждений, отмечается в работе Гольдблатта: «Аналогично те исследования структуры, которые относятся к так называемым «логикам», уже вышли за пределы своих исходных основ (анализа принципов рассуждений)» [2].

Развитие как раскрытие внутреннего содержания математики и формальной логики, приводящее к появлению ее новых типов, можно рассматривать как процесс выхода имеющихся форм за собственные границы. Этот процесс характеризуется в диалектике Гегеля в качестве «снятия» (Aufheben). Это такое развитие, при котором старая форма не исчезает, но сохраняется включением в новую, которая помимо нее включает в себя и ее отрицание, объединяя их в новом единстве как моменты этого единства. Пример этого дает нам развитие геометрии до возникновения неевклидовой. Другим примером может служить изменение представлений о числе.

Согласно О. Шпенглеру, «есть множество миров чисел, так как есть множество культур. Мы обнаруживаем индийский, арабский, античный, западный тип математического мышления и вместе тип числа» [3]. Считая западную культуру преемницей античной, можно рассматривать эволюцию взглядов на число на оси «античный мир —западный мир». За начало отсчета примем пифагорейско —платоновский взгляд на число. Можно обнаружить две развившиеся из него в дальнейшем числовые системы. Первая, развиваемая Плотином и Ямвлихом, в своей основе содержит представление о числе как о сущности всех вещей. Вторая, выросшая из теории абстракции в «Метафизике» Аристотеля, характеризуется высокой степенью формализации числа. Развитие воззрений на число в западной культуре было до последнего времени развитием второй системы. Результатом чего явилась позитивистская концепция числа, а выросшая на ее основе числовая система основана на голом счете монотонно следующих единиц. В настоящее время наблюдается эволюция взгляда на число, начало которой положено трудами Г. Кантора по теории множеств. Пересмотр проходит в русле пифагорейско-платоновской традиции, при этом все более проявляется структурность числа.

Наконец, язык теории категорий может служить примером возможности обобщения в нем языков теории множеств и теории структур. Например, мономорфной в теории категорий называют стрелку $a \to b$, которая сократима слева, т.е. такую, что if $f \circ g = f \circ h$ то $g = h$. В теории множеств этому соответствует инъективное отображение. Но это понятие охватывает также отношение порядка, которое представляется стрелкой $a \to b$, если $a < b$ (т.е.отношение в языке теории структур заменяется стрелкой в языке теории категорий), и операции, например над натуральными числами: $m+n=m+p \Rightarrow n=p$. Здесь натуральное число на языке теории категорий есть стрелка, а композиция – операция сложения чисел.

Уже из этих примеров видно, что понятие стрелки в теории категорий охватывает такие понятия как отображение в теории множеств (и не только), отношения, числа, а более широко –элемента алгебраической структуры и, вероятно многое другое, что еще не описано языками различных разделов математики. А если это так, то есть надежда на то, что потенциал теории категорий позволит расширить возможности моделирования на объекты и процессы, которые пока не могут моделироваться с достаточной степенью адекватности на языках других разделов математики.

«Привлечение» диалектического метода к анализу развития математики и математической логики

Математика, как и всякая наука нового времени, ориентируется на методы, диктуемые рефлектирующим рассудком, как его определял Гегель. То есть оперирует абстрактными определениями, которые разделяют между собой определяемые предметы. Однако, ход развития математического знания выводит ее за пределы рассудочной логики и об этом говорит характеристика Г.В.Ф. Гегеля понятия бесконечно малой величины как исчезающей в себе величины, как трансцендентного понятия.

Это может означать, что математика, являясь продуктом саморефлексии духа, в процессе саморазвития сама составляет свой конечный продукт, то есть понятие математики составляет конечный результат развития математики. Предмет же математики требует определения, так как рассматривать ее как науку о числах в привычном понимании этого слова уже нельзя. В частности, объектом математического знания стали структуры или, следуя выражению И.Р. Шафаревича, «числоподобные» структуры. В этом определении остается элемент противопоставления новых объектов математики (структур) числу. Развиваемый А.Ф. Лосевым диалектический анализ числа как понятия позволяет снять это противопоставление, рассматривая число в различных моментах его развития. Само понятие числа есть понятие, содержащее структуру.

По мнению А.Ф. Лосева, структурные свойства числа раскрываются в развитии триады: интенсивное число – экстенсивное число – эйдетическое число, причем первые два элемента этой триады составляют диалектическую противоположность, третий же является разрешением этой противоположности как их диалектический синтез [4].

В работе «Диалектические начала математики» Лосев так формулирует развитие понятия числа и простого начала: «Интенсивно-экстенсивно-эйдетическое число …есть раздельность, и в этом смысле оно есть инобытие первоначала. В чем же их синтез? Какую форму примет тут «становление» и «ставшее»…? Первопринцип есть вечное творчество, вечное возникновение, поток для всего возникающего; это базированность на самом себе и независимость ни от чего, то есть полная свобода» [4, с.38].

Эту базированность числа на самом себе можно видеть в «схеме» фон Неймана, в которой натуральный ряд порождается пустым множеством: $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\ldots$, то есть натуральный ряд возникает из бесконечного соотношения с собой пустого множества, при этом натуральные числа являются теми формами конечного и изменяющегося нечто, которые и участвуют в этом бесконечном соотношении. В частности, категорное расширение понятия оценки позволяет генерировать новые типы формальной логики [5,6].

О возможности развития внутреннего содержания математики и математической логики средствами самой математики

В «Науке логики» Гегель предлагает единственный метод, который, по его словам, способен сделать логику чистой наукой. Он предполагает, что форма, которую может обрести та или иная определенность, имея в самой себе отрицание, снимает себя и тем самым переходит в более высокую форму, в которой исходная обретает статус момента. Т.е. исходная форма при этом не исчезает, не превращается в ничто, а входит в новую более общую форму как ее элемент или момент. Иллюстрацией такого подхода к развитию понятия в себе, может служить, по мнению автора статьи, история с созданием неевклидовых геометрий. Отказ от пятого постулата позволил геометрии выйти за границы евклидовой геометрии, в то же время не отрицая последней, а оставляя ее как одну из возможных форм.

За последнее время математика претерпела существенные изменения, которые позволяют сделать следующие утверждения:

1. Математика, в ее современном виде, вряд ли может рассматриваться только как наука о числах и тем более о количествах. Да и само понятие числа претерпело значительные изменения. Здесь необходимо обратить внимание на то, что у Гегеля мы не нашли четкого разграничения между числом и количеством, возможно он понимал под ними одно и тоже.

2. Появилась возможность с единой точки зрения ставить и анализировать во-

прос о «новой математике», который в последнее время все чаще поднимается. Делается это в таком духе, что новая математика должна прийти на смену традиционной с практически полным отрицанием ее методов и понятий.

3. Нарастающее разнообразие направлений в математике, их слабая связанность позволяет сделать вывод о том, что в самой математике назрела необходимость пересмотра ее методов и выработки такого метода, который позволил бы рассматривать ее развитие как саморазвитие в его необходимости. Т.е. необходима не новая математика, а новый взгляд на ее развитие. И такой взгляд мы находим у Гегеля – это диалектика, в рамках которой развитие математики должно рассматривать как саморазвитие, при котором противоречия, возникающие внутри ее разделов, заставляют их «снимать» и выходить на более высокий уровень математических определений.

Определения структур и на их основе форм логического исчисления не должны находиться лишь во внешнем отношении друг другу, но должны быть органически связаны между собой, и теория категорий может послужить этому в значительной мере, т.к. дает возможность геометрического рассмотрения этой органической связи. Понятие локальной истинности дает возможность рассматривать многообразия или пространства, в которых тип логического исчисления меняется в разных его областях, аналогично тому, как в общей теории относительности меняется кривизна пространства-времени. Если там это обусловлено наличием инертной массы, то тогда и семантическом пространстве такую материю, например, в виде взвешенного семантического вакуума, мы должны искать. Взвешенность может определяться мерой на пространстве (структуре) значений оценки. Само пространство и есть пространство оценки, образованное парой язык-значение оценки.

Переход форм меры истинности на значениях оценки как диалектический процесс. Виды исчислений и правила вывода

Выше мы ссылались на утверждение Гегеля о том, что «диалектический момент есть снятие такими конечными определениями самих себя и их переход в свою противоположность» [5 с.205]. Эти конечные определения есть наличное бытие, про которое в спекулятивной философии Гегеля говорится, что «наличное бытие есть определенное бытие; его определенность есть сущая определенность, качество. Своим качеством нечто противостоит иному, оно изменчиво и конечно, определено всецело отрицательно не только в отношении иного, но и в самом себе. Это отрицание прежде всего по отношению к конечному нечто есть бесконечное; абстрактная противоположность, в которой выступают эти определения, разрешается в лишенную противоположности бесконечность, в для-себя-бытие» [6, с.93].

Наличное бытие как качество конечно и изменчиво, однако отрицание, которое как определяет качество, так и обеспечивает его изменчивость, есть в то же время отрицание и его конечности, т.е. есть бесконечное. Это отрицание как по отношению к нечто, так и по отношению к иному есть для-себя-бытие. Таким образом, качество как положительное как сущее есть реальность, качество же «обремененное» отрицанием, есть отрицание вообще и определяется как граница или предел. Но становление в философии Гегеля тоже определяется как предел.

И если конкретное значение оценки – истинность формулы алгебры логики мы определим как качество, как ее определенность, то количественное значение оценки должно выступать как внешняя этому бытию определенность или как “снятая” определенность. И только в мере, которую Гегель определяет как качественное количество, они находят свое единство. В частности, для суждения «А есть В» считается истинным лишь если все а из А есть В. И не важно, для скольких а из А это не выполняется, если найдется хотя бы одно, то данное утверждение ложно в традиционной логике. Т.е. в этом случае на множестве всех объектов вводится мера, имеющая два значения: 0 и 1, причем $\forall C \subset A$ имеем $|\tilde{N}| = 0$, и лишь $|A| = 1$. Если же $C \subset D$ и при этом $D \neq A$, то также $|D| = 0$, хотя D и содержит «больше» чем C элементов со свойством B, но это можно трактовать как то, что при переходе от C к D истинность меняется на бесконечно малую величину.

Итак, непосредственное представление об истинности приводит к тому, что перенос этого отношения на случай, когда в качестве значений оценки рассматривается система подмножеств P(X), некоторого множества X, принимается возможным существование только двух мер истинности 0 и 1, причем только X имеет меру 1. Отрицание, которое несет в себе такое определение истинности и соответствующее логическое исчисление, заключается в самом способе задания меры истинности, которое носит слишком специальный характер. Кроме того, если X бесконечное множество, то разность X/N, где N, любое конечное множество при этом задании меры имеет меру ноль. Выход за пределы такого задания меры носит естественный характер. Одним из способов задания меры истинности, при котором исключается описанный случай, но при этом сохраняется как структура значений меры истинности, т.е.она по прежнему имеет лишь два значения 0 и 1, так и система законов классического исчисления, является способ задания меры на системе подмножеств принятый в нестандартном анализе. При этом мерой 1 обладают лишь те подмножества, которые принадлежат некоторому нетривиальному ультрафильтру. Тогда все дополнения к элементам ультрафильтра, в семейство которых входят все конечные множества имеют меру 0.

Следующий шаг в отрицании такого определения меры может заключаться в необходимости признания ее многозначности, как это происходит, например, в случае вероятностной меры, что дает вероятностный вариант логического исчисления. Наконец, отрицанию может подвергнуться сам факт того, что любое подмножество может обладать мерой истинности, но только подмножества, принадлежащие некоторой структуре, например топологии.

Метод обобщенного нестандартного анализа можно использовать при изучении типов формальной логики и позволяет рассматривать взаимосвязь между различными типами логики на основе исследования взаимосвязи порождающих их структур, на которых принимает значение оценка [7,8].

Оценка на булевой алгебре

Определим оценку со значением как *гомоморфизм* $\upsilon : V_0 \to A$ где A некоторая не обязательно двухэлементная булева алгебра, в частности $\upsilon : V_0 \to P(I)$, где I некоторое множество.

Пусть φ - формула языка структуры ***K***, и φ_k оценка этой формулы в решетке $B = \{0,1\}$. $\|\varphi_k\|$ оценка этой формулы в $P(K^V)$, т.е оценкой будем называть функцию вида $\| \; \| : Fm \to P(K^V)$, где V множество переменных языка L, а $P(K^V)$ решетка, элементами которой служат подмножества K^V. Булева решетка $P(K^V)$ есть расширение решетки **B,** в котором $P(K^V) = 1$, Ø=0. Однако в структуре $P(K^V)$ значением оценки служит любое подмножество $J \subseteq P(K^V)$. По аналогии с [6] введем предикат $Tr_j(\varphi_k) \equiv (\|\varphi_k\| \in j)$, где j – некоторое подсемейство $P(K^V)$. Рассмотрим, как выбор семейства j может повлиять на связь между оценками φ_k и $Tr_j(\varphi_k)$, различие которых служит основанием для разделения типов логических исчислений.

В нестандартном анализе рассматривается множество - степень K^I, а оценка принимает значения на *P*(I), выбор в качестве j ультрафильтра в *P*(I) позволяет заменить $Tr_j(\varphi_k)$ «обычной» истинностью суждения φ_k о структуре K^I. Поскольку для ультрапроизведений $K^I /_j \equiv K^I /_{\sim j}$, имеем $\varphi_k /_j ([f_1],[f_2],,,[f_n]) \Leftrightarrow ([\varphi_k(f_1, f_2,..., f_n] \in j)$ где $[f_i] \in K^I /_j$. Как будет показано ниже, это фактор-множество содержит два элемента. Это обеспечивает эквивалентность обеих семантик. Ситуация в нестандартном анализе отличается от рассматриваемой далее выбором множества на котором принимает значение оценка, однако имеет ту же диалектическую природу, а именно: истинность как мера на множестве индексов, не являющихся элементом ультрафильтра, является бесконечно малой величиной и, следовательно, результатов оценки формулы на этой совокупности индексов не достаточно для изменения её в сторону понижения, если на оставшихся индексах она равна 1, и повышения, если она на них равна нулю.

Нас, как было указано, интересует случай, когда оценка есть функция $Fm \to P(K^V)$. Поскольку K^V есть семейство функций $f : V \to K$ из множества в множество, т.е. само является множеством, то будем рассматривать его как множество, проиндексированное некоторым семейством **I**. В дальнейшем $K^V = I$.

Если рассматривается оценка со значениями в $P(I)$, т.е. оценка $\|\varphi_k\| : \varphi \to P(I)$, то при условии, что j ультрафильтр над $P(I)$ получим оценку в ультрапроизведении $P(I)/_{\sim j}$. В [13] доказано, что если фильтр j в псевдобулевой алгебре A максимален, то фактор - алгебра $A/_{\sim j}$, содержит два элемента, т.о. отношение эквивалентности ~j приводит к оценке на булевой алгебре $P(I)/_{\sim j} = B = \{0,1\}$.

Пусть $\|\varphi_k\|$ оценка формулы φ_k в $P(I)$. Введем отношение ~j между оценками, такое, что $\|\varphi_k\| \sim_j \|\varphi_k^1\| \Leftrightarrow (\|\varphi_k\| \Rightarrow \|\varphi_k^1\| \in j \wedge \|\varphi_k\| \Rightarrow \|\varphi_k^1\| \in j)$, где j фильтр решетки $P(I)$ [9].

В [13] доказано, что ~j отношение эквивалентности и для любой для любой оценки $\|\varphi_k\|$, такой, что $\|\varphi_k\| \in j$ справедливо $\|\varphi_k\| \sim_j I = 1$.

Таким образом, как и в случае нестандартного анализа, выбор в качестве j максимального фильтра позволяет заменить $Tr_j(\varphi_k) \equiv (\|\varphi_k\| \in j)$ «обычной» истинностью суждения φ_k о структуре *K*. В то же время этого нельзя сделать при $Tr_j(\varphi_k) \equiv (\|\varphi_k\| = 1)$, т.е. в случае если в качестве j выбран единичный фильтр. С математической точки зрения это объясняется тем, что при выбранном отношении эквивалентности только оценка равная **I** дает значение истинности равное 1. Кроме того, для любых оценок таких, что $\|\varphi_k\| \subset \|\varphi_k^1\|$ будет иметь место $\|\varphi_k\| < \|\varphi_k^1\|$. С точки зрения приведенных выше рассуждений это означает, что при таком выборе фильтра каждый элемент множества **I** обладает конечной мерой и множество значений оценок эквивалентно мощности $P(I)$.

Рассмотрим это подробнее. В работе [7] рассматривается взаимоотношения семантик:

1) $Tr_j(\varphi_k) \equiv (\|\varphi_k\| = 1)$ и φ_k, показано, что для оценки на булевой алгебре $P(I)$ $Tr_j(\varphi_k) \to \varphi_k$ для хорновых формул и $\varphi_k \to Tr_j(\varphi_k), (\varphi_k) \equiv (\|\varphi_k\| = 1)$ для позитивных. Т.е. в общем случае оценки при этих видах истинности в общем случае не совпадают.

2) В то же время для семантик $Tr_j(\varphi_k) \equiv (\|\varphi_k\| \in F)$, где F – ультрафильтр $Tr_j(\varphi_k) \leftrightarrow \varphi_k$ φk для всех формул. Оба утверждения доказываются индукцией по длине формул.

Рассмотрим оба взаимоотношения с точки зрения оценки как отображения на $P(I)/\sim_j$. Для этого, как и выше, на множестве оценок $P(I)$ введем отношение эквивалентности ~j.

1. $Tr_j(\varphi_k) \equiv (\|\varphi_k\| \in F)$, где F – ультрафильтр. В этом случае $P(I)/\sim_j = P(I)/_{\sim F} = B$. Действительно, поскольку F ультрафильтр, то для любого $a \in P(I)$ $a \in F \vee \neg a \in F$. Следовательно, $\forall a \in P(I)$ либо $|a| = 1 \wedge |\neg a| = 0$, либо $|a| = 0 \wedge |\neg a| = 1$, где $|a| \in P(I)/_{\sim F}$. Таким образом, в этом случае структуры значений оценок для $Tr_j(\varphi_k)$ и φ_k изоморфны. Это значит, что для каждого вида оценки, они сводятся к гомоморфизмам $\varphi : Fm \to B$ для оценки $Tr_j(\varphi_k)$ и $\psi : Fm \to B$ для оценки (φ_k), причем эти гомоморфизмы совпадают на системе образующих алгебры Fm, а значит и на всей алгебре Fm.

2. $Tr_j(\varphi_k) \equiv (\|\varphi_k\| = 1)$. В этом случае $P(I)/\sim_j = P(I)/_{\sim 1} = P(I)$. Действительно, поскольку F ультрафильтр, то для любых $a \in P(I)$, $b \in P(I)$ $a \sim_1 b$ тогда и только тогда, когда $a \to b = 1 \wedge b \to a = 1$, т.е тогда и только тогда, когда $a = b$. Это означает, что $P(I)/_{\sim F} = P(I)$. Таким образом, в этом случае структуры значений оценок для $Tr_j(\varphi_k)$ и φ_k не изоморфны если *P*(I) содержит более двух элементов.

Оценка на псевдобулевой алгебре

Рассмотрим случай, когда j фильтр над импликативной решеткой (псевдобулевой алгеброй) **ℑ(*I*)⊆*P(I)***, элементы которого являются значением оценки некоторого суждения φ_k о структуре ***K***.

Пусть $\|\varphi_k\|$ оценка формулы φ_k в **ℑ(*K*^{V})**. Введем отношение ~ между оценками, причем $\|\varphi_k\| \sim_j \|\varphi_k^1\| \Leftrightarrow (\|\varphi_k\| \in j \wedge \|\varphi_k^1\| \in j)$.

Отношение ~ есть отношение эквивалентности на множестве оценок, кроме того, отношение эквивалентности ~j такое, что $\|\varphi_k\| \sim_j \|\varphi_k^1\| \Leftrightarrow (\|\varphi_k\| \Rightarrow \|\varphi_k^1\| \wedge \|\varphi_k^1\| \Rightarrow \|\varphi_k\|)$ ‖ [9], является расширением отношения эквивалентности ~.

Тогда фактор множество **ℑ(*I*)**│~j есть упорядоченное множество оценок, такое что если $\|\varphi_k^1\| \in 1$ то $[\|\varphi_k^1\|] = 1_{P(K^V)/\sim j}$. В случае, когда j, как выше, - максимальный фильтр **ℑ(*I*)**│~j ={0,1} логика индуцированная оценкой есть классическая логика. При выборе в качестве j единичного фильтра, логика, индуцированная оценкой, будет интуиционистской.

Пусть структура **ℑ(*I*)⊆*P(I)*** есть решетка A с нулем и единицей вида <A, ∩, ∪, →,÷,¬, ┌, 0,1>, где ÷ относительная разность, ┌a=1÷ a, ¬ a= a→0, т.е. решетка, в которой два вида дополнения. Было показано, что оценке со значениями на структуре A соответствует Н-В логика [10], в которой закон противоречия не выполняется для отрицания ┌, т.е. оценка $\|a \wedge \neg a\| \geq 0$. Следовательно, логика, индуцированная оценкой при j=1 окажется логикой, в которой не выполняется закон противоречия.

Modus ponens и оценка на псевдобулевой алгебре

Структура, на которой принимает значение оценка формул формального языка, и выбранное отношение эквивалентности определяют не только тип логики, но и правила вывода, соответствующие типу логики. Например, требование выполнимости правила modus ponens, которое на языке оценок выглядит как: $\|\varphi_k\| \in 1$, $\|\varphi_k \Rightarrow \varphi_k^1\| = 1$ влечет $\|\varphi_k^1\| = 1$ (1) есть частный случай правила $\|\varphi_k\| \in j$, $\|\varphi_k \Rightarrow \varphi_k^1\| \in j$ влечет $\|\varphi_k^1\| \in j$, (2) где j – фильтр на алгебре оценок. В *modus ponens* j=1. Но (2) свойство импликативной решетки. Таким образом, *modus ponens* в форме (2) является правилом вывода для всех логик со значениями на импликативных решетках (псевдобулевых алгебрах). При этом на элементах фильтра должна быть введена мера истинности. Как известно, на элементах ультрафильтра она равна 1, на дополнениях 0, отсюда классическое значение истинности, на элементах фильтра ситуация зависит от введенной меры.

Категорный подход к анализу типов логического исчисления

В описанном выше подходе рассматривались отображения алгебры формул на алгебру значений оценки, являющиеся гомоморфизмами. Обобщением этого подхода на случай алгебры оценок с дополнительной структурой может служить подход, основанный на использовании теоретико-категорного представлении. При этом представлении подход, основанный на семантическом анализе типов логический исчислений, моделируется функторами, сохраняющими дополнительную категорную структуру: из категории, соответствующей данной формальной теории в категорную структуру, на которой принимают значения оценки. В случае обобщения структур, являющихся решетками, это скелетная категория порядка с произведением и копроизведением.

В частности, такой подход используется в нестандартном анализе, которой «есть алгебро-логический метод, основанный на рассмотрении оценок и в основном применяемый для изучения объектов, представимых в виде глобальных элементов некоторого пучка» [7, с. 337].

Модели, которые рассматриваются классической теорией, являются функторами из категории, соответствующей некоторой теории в категорию всех множеств. Рассматривая вместо последней какую-либо другую категорию, обладающую определенной структурой, получим неклассическую теорию. Тип полученной теории будет индуцироваться заданной категорией и ограничениями, наложенными на функтор (его задаваемыми свойствами).

При таком подходе логики как вид исследования структур представляют собой семейство функторов из категорий, соответствующих формальным теориям в категории структур, на которых принимает значение оценка. Иными словами, в категорном подходе оценка есть функтор, сохраняющий дополнительную структуру. Вид минимальной логики «образующей» будет определяться типом функтора и, следовательно, минимальные логики будут представлять собой семейство, определяемое семейством баз структур значений оценки. Нельзя исключать и того, что сюда войдут функторы как гладкие отображения многообразий, поскольку в обиход уже введен термин «локальная истинность», в частности в [2] рассматривается язык PL, в который включена новая связка Δ, и если α формула этого языка, то формула $\Delta\alpha$ читается как «локально имеет место, что α».

В категории К подобъекты определяются как семейство вида Sub (d) $=\{[f] \mid f$ стрелка и $cod(f)=d\}$. Классификатором подобъектов называют К-объект Ω вместе со стрелкой true:$1\rightarrow\Omega$, для которой диаграмма

f
a d

! $\chi(f)$
true
1 Ω

декартов квадрат.

Для Ω, также можно рассматривать семейство Sub Ω. Рассматривая Ω как структуру, на которой принимает значение оценка, получаем инструмент для семантического анализа типа логического исчисления. Ω -аксиома, в частности гласит, что для каждой моностреклки f:a$\rightarrow$d существует одно и только одна стрелка $\chi(f)$, для которой диаграмма

f
a d

! $\chi(f)$
true
1 Ω

декартов квадрат.

Следствием Ω -аксиомы является утверждение, что категории, обладающей классификатором подобъектов Sub (d) $\simeq$ K (d,Ω). В частности, в качестве К можно взять категорию, соответствующую формальной теории (в частности алгебру формул логического исчисления), в качестве Ω - структуру, на которой принимает значение оценка. В [5] доказано, что утверждение о том, что топос К булев, эквивалентно утверждению о том, что Sub Ω - булева алгебра. Этим определяются и ограничения на свойства функции $\chi(f)$ – она должна сохранять структуру. В частности, подтверждается предположение о том, что структура оценки для булевой алгебры формул должна быть булевой алгеброй, что не всегда учитывается в многозначных логиках.

Приведенная выше теорема означает также, что если $H=(H,\subseteq)$ – псевдобулева алгебра формул, то Sub Ω не может быть алгеброй, отличной от булевой.

Развитие категорного подхода есть прямое следствие взаимодействия процессов абстрагирования и специализации, которое может рассматриваться как диалектический аспект выдвинутой А.Ф. Лосевым антитезы чистой математики и математики естествознания.

Заключение

Математика, развиваясь как формальная наука и опираясь на тот тип мышления, который характеризуется Гегелем как рассудочный, отличный от разумного, тем не менее, приводит к результатам, выходящим за рамки рассудочной деятельности. «Изложенное выше и есть та же диалектика, которой пользуется рассудок против даваемого высшим анализом понятия бесконечно малых величин. Величины эти определены как величины, существующие в своем исчезновении – не до своего исчезновения, ибо в таком случае они конечные величины, и не после своего исчезновения, ибо в таком случае они ничто….Математика обязана своими самыми блестящими успехами тому, что она приняла то определение, которого не признает рассудок», - пишет Гегель [6, с. 89-90]. И хорошо известно, сколь долгий путь пришлось пройти до того, как бесконечно малые приобрели статус величин. Можно сказать, что Гегель предвосхитил их актуализацию.

Лосев развивает этот тезис в «Диалектических основах математики», дает объяснение диалектичности развития математического знания как осуществлению в действительности интенсивно-экстенсивно-эйдетического числа. «Вопрос начинает разрешаться, как только мы вспомним, что единственная сфера бытия, где числовые конструкции триединой идеальной сферы находят для себя полное, адекватное и совершенно буквальное осуществление, это есть сфера природного бытия, природы. Ведь только там, где материя молчит, где она ест только абсолютный послушный выполнитель велений чистого числа, только там интенсивно-экстенсивно-эйдетическая сфера проявит себя целиком. Действительно, только математическое естествознание может напомнить нам действительность и общезначимость чистой математики; …только тут место той действительности, о которой говорит идеальная триединая сфера….Но тогда очевидно, что вся триединая идеальная числовая область является для такой действительности слишком отвлеченной….Однако это все еще слишком отвлеченная структура для настоящей действительности. Настоящая действительность вмещает в себе самопроизвольность своего протекания, и потому ей всегда свойственна стихия случайности» - пишет А.Ф. Лосев [4, с. 39].

Последнее во многом объясняет с одной стороны необыкновенную эффективность чистой математики в естественных науках, с другой то, почему развитие в рамках одного типа формальной логики (требований к общезначимости формул) ограничивает сферу эффективного моделирования.

В настоящее время моделирование процессов управления сложными объектами и прогнозирование их развития сталкивается с трудностями, связанными с тем, что признанные классическими методы формального моделирования не всегда эффективны при описании динамики развития таких объектов. Методы формального моделирования таких объектов и процессов не систематизированы, их применение не базируется на единой методологии, что снижает эффективность их применения. Поиск новых подходов требует не только тщательного анализа причин возникающих при моделировании состояний таких объектов, но и выработки общего подхода к оценке возможностей математики как метода моделирования объектов и процессов различной природы. Недостаточно только констатации факта низкой эффективности того или иного метода формального моделирования. Практика моделирования состояний сложных объектов в настоящее время часто нацелена на применение качественных, а не количественных оценок. Технически это осуществляется методами теории нечетких множеств, использующей лингвистические переменные, значения которых носят качественных характер. Однако эта техника не имеет надежной базы. Разработка такой базы могла бы осуществляться на основе разработанного в работе А.Ф. Лосева синтеза понятий числа как интенсивно-экстенсивно-эйдетического и принципа, выдвинутого Г.В.Ф. Гегелем, на основе которого количество и мера имеют разное влияние на переход объекта из одного состояние в другое. При этом требуется творческое объединение этих подходов в средствах, разрабатываемых современной математикой, и обобщения имеющейся на сегодняшний день теории меры.

В триаде количество-качество-мера, возможно, и кроется секрет потенциальной эффективности математики, ведь от того, какую меру коррупции, равнодушия или вообще зла готово принять общество, зависит и то, каково его качество.

Список литературы

1. Лосев А.Ф. Философия имени. М.: Изд-во Моск. ун-та., 1990.
2. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. М.: Мир, 1983.
3. Шпенглер О. Закат Европы. Очерки морфологии мировой истории. Пер с немецкого. – М.: Мысль, 1993.
4. Лосев А.Ф. Диалектические основы математики. М.: Academia, 2013.
5. Гегель Г.-В.-Ф. Энциклопедия философских наук. Т.1. М.: Мысль, 1974.
6. Гегель Г.-В.-Ф. Наука логики. СПб.: Наука, 1997.
7. Любецкий В.А. Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа // Успехи математических наук. 1989. Т. 44. Вып. 4 (269). С. 99-153.
8. Титов А.В. Использование нефинитных методов в семантическом подходе к исследованию типов формальной логики // Ученые записки Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Серия: Философия. Культурология. Политология. Социология. 2016. Т.2 (68). №4. С. 143-156.
9. Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М.: Наука, 1972.
10. Титов А.В. Нефинитные методы обобщенного нестандартного анализа формирования вариантов неклассической логики // Речевые технологии. 2023. №1. С.76-90.

Сведения об авторе

Титов Андрей Валентинович – кандидат технических наук, Московский физико-технический институт.

Titov A. V.

DIALECTICAL ASPECTS OF THE DEVELOPMENT OF MODERN MATHEMATICS AND MATHEMATICAL LOGIC

Abstract: *In his writings, Hegel proceeds from the premise that truth is learned only by scientific means, while the question arises in the necessary way that there is science. And a new look at the concept of science naturally imposes new requirements on the image of science. And it should be noted that in the 20th century, representatives of different fields of science began to come to the same conclusion, in particular mathematics, both representatives of «pure mathematics» and, to an even more painful extent, scientists engaged in applying mathematics to the description of entities of different natures. In particular, this topic in 1990 was raised by V.V. Nalimov in the article «Requirement for changing the image of science.»*
At the same time, Hegel's criticism of the approach of systematization of philosophical knowledge put forward by some philosophers, based on the involvement of the methodology developed in mathematics, seems completely justified. He, as is now clearly seen, warned that the methods adopted in mathematics impose restrictions on the ability to describe entities.
And the main thing is that, in contrast to the heuristic, based on a developed scientific and scientific intuition, awareness of the limitations of rational methods of description by scientists - mathematicians, Hegel builds a system of scientific knowledge - the science of logic, in which the «shortcomings» of the methods adopted in mathematics and in science in general are reasonably revealed.
The proposed work examines the question of the possibility of expanding the possibility of mathematical description of various kinds of phenomena and entities, and the way to develop these possibilities, and therefore the possibilities of description in different fields of knowledge. Including for the use of its means in the development of types of formal logic.
Keywords: *eidos, scheme, symbol, myth, logos, logical construction of eidos, dialectics, mathematical structures, non-standard analysis, evaluation, category, truth.*

References

1. Losev A.F. Filosofija imeni [The Philosophy of a Name]. M.: Publishing house of Moscow University, 1990.
2. Goldblatt R. Toposy. Kategornyj analiz logiki [Topoi: the Categorial Analysis of Logic]. M.: Mir Publ., 1983. (In Russian).
3. Shpengler O. Zakat Evropy. Ocherki morfologii mirovoj istorii [Der Untergang des Abendlandes: Umrisse einer Morphologie der Weltgeschichte] / Translated from German. M.: Mysl Publ., 1993. (In Russian).
4. Losev A.F. Dialekticheskie osnovy matematiki [The Dialectical Elements for Mathematics]. M.: Academia Publ., 2013.
5. Hegel G.V.F. Jenciklopedija filosofskih nauk [Enzyklopädie der philosophischen

Wissenschaften im Grundrisse]. V.1. M.: Mysl Publ., 1974. (In Russian).
6. Hegel G.V.F. Nauka logici. [Wissenschaft der Logik]. SPb.: Nauka Publ., 1997. (In Russian).
7. Ljubeckij V.A. Ocenki i puchki. O nekotoryh voprosah nestandartnogo analiza [Values and Bundels. On Some Questions in the Non-Standard Analysis] // Uspehi matematicheskih nauk. 1989. Vol. 44. Issue. 4 (269). Pp. 99-153.
8. Titov A.V. Ispol'zovanie nefinitnyh metodov v semanticheskom podhode k issledovaniju tipov formal'noj logiki [The Use of Non-Finite Methods in Semantic Approach in Researching Types of Formal Logics] // Uchenye zapiski Krymskogo federal'nogo universiteta im. V.I. Vernadskogo. Serija: Filosofija. Kul'turologija. Politologija. Sociologija. 2016. Vol. 2 (68). № 4. Pp. 143-156.
9. Raseva E., Sikorskij R. Matematika metamatematiki [The Mathematics of Metamathematics]. M.: Nauka Publ., 1972. (In Russian).
10. Titov A.V. Nefinitnye metody obobshhennogo nestandartnogo analiza formirovanija variantov neklassicheskoj logiki [Non-Finite Methods in Generalized Non-Standard Analysis of Forming the Non-Classical Logic Variants] // Rechevye tehnologii. 2023. №1. Pp.76-90.

Titov Andrey V. - CSc in Engineering, Moscow Institute of Physics and Technology.