

**УДК 519.713.2**

## НЕПРЕРЫВНАЯ ЛОГИКА. ИСТОРИЯ, ТЕОРИЯ, ПРИМЕНЕНИЯ

**В.И. Левин**

*Рассмотрены основные вопросы непрерывной логики: определения, свойства, отличия от дискретных логик. Затронуты вопросы истории и применений.*

**Ключевые слова:** непрерывная логика, логические функции, формы, базис.

В последние годы все большее внимание теоретиков и прикладников вызывает непрерывная логика, которая теперь фигурирует в числе учебных дисциплин ряда технических и гуманитарных вузов.

Непрерывная логика (НЛ) вводится как некоторое естественное обобщение традиционных дискретных логик (ДЛ) на случай, когда множество возможных значений логических переменных непрерывно (континуально). Это обобщение способствует познанию окружающего нас непрерывного мира. Структурно НЛ напоминает многозначную ДЛ, но существенно отличается от двузначной ДЛ. Это связано с тем, что операцию отрицания в НЛ нельзя определить так, чтобы она была дополнением, как в двузначной ДЛ, т.е. чтобы выполнялись логические законы исключенного третьего и противоречия. В итоге, с учетом непрерывности переменных, НЛ отличается от ДЛ как по номенклатуре решаемых задач, так и по методам их решения. Сегодня НЛ – самостоятельная научная дисциплина, характер которой определяется потребностями ее гармонического развития и многочисленными приложениями (математика, техника, экономика, социология, и т.д.). Основные задачи НЛ: 1) перечисление всех функций НЛ с данным числом аргументов; 2) представление функций НЛ в стандартной форме; 3) выделение элементарных функций НЛ; 4) минимизация и декомпозиция функций НЛ; 5) анализ и синтез функций НЛ; 6) решение уравнений и неравенств НЛ; 7) дифференцирование и интегрирование функций НЛ; 8) установление полноты системы функций НЛ. Задачи 1–4 по постановке (и частично по методам решения) аналогичны соответствующим задачам ДЛ. Задачи 5–8 специфичны для НЛ.

Пусть  $C = [A, B]$  – отрезок с серединой  $M = (A + B)/2$ . Основные базовые операции НЛ определяются на  $C$  как

$$a \vee b = \max(a, b) \text{ (дизъюнкция)}, \quad a \wedge b = \min(a, b) \text{ (конъюнкция)}, \\ \bar{a} = 2M - a \text{ (отрицание)}; \quad a, b \in C.$$

(1)

Знак  $\wedge$  часто не ставится. Кроме операций (1), в качестве базовых операций НЛ используют (но реже) операции: включение  $a \supset b$ , импликация  $a \rightarrow b$ , эквивалентность  $a \equiv b$ , неэквивалентность  $a \not\equiv b$ , Шеффера  $a | b$ , Вебба  $a \downarrow b$ , противоречие  $a \neq a$ , тавтология  $a \equiv a$ , запрет  $a \overrightarrow{\rightarrow} b$ . Все они выражаются через

операции (1) формулами, аналогичными соответствующим формулам двоичной ДЛ, например,  $a \rightarrow b = \bar{a} \vee b$ ,  $(a \neq b) = a\bar{b} \vee \bar{a}b$  и т.д. Алгебры, образуемые на множестве  $C$  теми или иными наборами базовых операций НЛ, называются алгебрами НЛ. Любая функция в виде суперпозиции конечного числа базовых операций некоторой алгебры НЛ, примененных к аргументам  $x_1, \dots, x_n \in C$ , называется функцией НЛ. Наиболее известна квазибулева алгебра НЛ

$$\Delta = (C; \vee, \wedge, \bar{\phantom{x}}). \quad (2)$$

Любая функция НЛ в алгебре (2) на любом наборе аргументов принимает значение одного из аргументов или его отрицания, в зависимости от соотношения значений аргументов и их отрицаний в данном наборе. Задать такую функцию можно таблицей значений типа табл. 1.

Таблица 1

$x, \bar{x}$	$y$	$z$
$x \geq \bar{x}$	$\bar{x}$	$x$
$x \leq \bar{x}$	$x$	$\bar{x}$

От табличного можно перейти к аналитическому представлению функции методом сочленения. Например, из табл. 1 получаем  $y = x\bar{x} = (x \neq x)$ ,  $z = x \vee \bar{x} = (x \equiv x)$ . Обратный переход осуществляется методом расчленения. Число функций НЛ от  $n$  аргументов в алгебре (2) растет с увеличением  $n$  гораздо быстрее, чем в алгебре двузначной ДЛ (булевой алгебре). Поэтому изучать свойства функций НЛ в квазибулевой алгебре (2) путем их перебора, как это делается в булевой алгебре, нельзя. Так что ограничиваются изучением отдельных типовых функций НЛ.

Типовыми функциями НЛ от  $n=0$  аргументов являются функции-константы

$$y_0 = A, y_1 = B. \quad (3)$$

Для  $n=1$  эти функции включают константы (3) и еще 4 функции, существенно зависящие от аргумента  $x$

$$y_2 = x, y_3 = \bar{x}, y_4 = x \vee \bar{x}, y_5 = x\bar{x}. \quad (4)$$

Для  $n=2$  это константы (3), 8 функций вида (4), зависящих от одного аргумента ( $x_1$  или  $x_2$ ), 10 функций, зависящих от двух аргументов

$$y_{10} = x_1 \vee x_2, y_{11} = x_1 x_2, y_{12} = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2), y_{13} = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2, y_{14} = \overline{x_1 x_2}, \\ y_{15} = \overline{x_1 \vee x_2}, y_{16} = \bar{x}_1 \vee x_2, y_{17} = x_1 \vee \bar{x}_2, y_{18} = \bar{x}_1 x_2, y_{19} = x_1 \bar{x}_2 \quad (5)$$

и еще 64 функции, зависящие от двух аргументов, получаемые суперпозицией перечисленных 20 функций, либо составлением таблицы значений функции и переходом к ее аналитическому представлению. Для  $n=3$  функции НЛ включают все упомянутые выше функции, зависящие от не более чем двух

аргументов, и все функции, существенно зависящие от 3 аргументов. Из последних наиболее употребительны дизъюнкция и конъюнкция

$$y = x_1 \vee x_2 \vee x_3 = \max(x_1, x_2, x_3), \quad y = x_1 x_2 x_3 = \min(x_1, x_2, x_3), \quad (6)$$

медиана и ее отрицание (инверсия)

$$y = \text{med}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3, \quad y = \overline{\text{med}(x_1, x_2, x_3)} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3,$$

(7)

функции Шеффера и Вебба

$$y = x_1 x_2 x_3, \quad y = x_1 \vee x_2 \vee x_3, \quad (8)$$

элементарные трехместные дизъюнкция и конъюнкция

$$y = x_1 \vee \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_3, \quad y = x_1 \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_3. \quad (9)$$

Другие функции, существенно зависящие от трех аргументов, можно получить суперпозицией перечисленных функций либо составлением таблицы значений функции и переходом к ее аналитическому представлению. Аналогично строятся множества функций НЛ от большего числа аргументов.

НЛ есть непосредственное обобщение ДЛ на случай непрерывного множества-носителя  $C$ . При этом большинство законов ДЛ сохраняется и в НЛ (тавтологии, переместительный, сочетательный, распределительный, де Моргана, поглощения, двойного отрицания, действия с константами, Клини). Однако законы противоречия и исключенного третьего двузначной ДЛ здесь не действуют и заменяются на законы

$$a\bar{a} = M - |a - M|, \quad a \vee \bar{a} = M + |a - M|. \quad (10)$$

При комбинировании операций НЛ с алгебраическими операциями сложения и умножения появляются новые законы, например, распределительный для сложения и вычитания относительно дизъюнкции и конъюнкции, спуска отрицания на слагаемые

$$a + (b \wedge c) = (a + b) \wedge (a + c), \quad a - (b \wedge c) = (a - b) \wedge (a - c), \quad \overline{a + b} = \bar{a} - b = \bar{b} - a \quad (11)$$

и др. Обобщая ДЛ, сама НЛ есть частный случай дистрибутивной структуры с псевдодополнением (т.е. с операцией отрицания, которая не есть дополнение, т.к. не выполнены законы исключенного третьего и противоречия). Значения непрерывных переменных НЛ  $x, x \in C = [A, B]$  можно интерпретировать по аналогии с ДЛ: граничное значение  $x = A$  ( $x = B$ ) есть мера истинности абсолютно ложного (абсолютно истинного) высказывания, промежуточные значения  $x$ ,  $A < x < B$ , суть меры истинности любых других высказываний.

Перечисление всех функций НЛ в алгебре (2) требует указать для них аналитические выражения. Для этого можно: 1) перечислить таблицы значений функций (таблицы для всех функций имеют одинаковый порядок следования вариантов упорядочения аргументов  $x_1, \dots, x_n$  и их отрицаний  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ , отличаясь распределением значений функций, равных  $x_i$  или  $\bar{x}_i$  между вариантами); 2)

перейти от таблиц к аналитическим выражениям методом сочленения. Однако при  $n \geq 3$  это затруднительно. Поэтому ограничиваются отдельными классами функций, которые выделяют по сходству с классами функций ДЛ, простоте получения формулы, важности практического применения.

В качестве стандартных форм функции НЛ в алгебре (2) принимают дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы (ДНФ и КНФ). Они отличаются от аналогичных форм двузначной ДЛ тем, что их элементарные конъюнкции (дизъюнкции) могут вместе с аргументом  $x_i$  включать и его отрицание  $\bar{x}_i$  (см. (9)). Переход от произвольного аналитического представления функции НЛ к ее ДНФ или КНФ аналогичен соответствующему для функций двузначной ДЛ. В качестве однозначных стандартных форм функций НЛ берут однозначные ДНФ и КНФ. ДНФ однозначно представляет функцию НЛ, если она тупиковая (несократимая) дизъюнкция неразложимых элементарных конъюнкций. Элементарная конъюнкция неразложима в дизъюнкцию конъюнкций, если она фундаментальна, т.е. непротиворечива (не содержит одновременно  $x_i$  и  $\bar{x}_i$ ) или противоречива, но содержит все аргументы данной функции в прямом  $x_i$  или инверсном  $\bar{x}_i$  виде. Алгоритм приведения любой ДНФ функции НЛ к однозначной ДНФ: 1) выделить в ДНФ все фундаментальные конъюнкции; 2) каждую нефундаментальную конъюнкцию  $K$  (она противоречива и содержит не все аргументы функции) представить дизъюнкцией фундаментальных конъюнкций, для чего взять ее конъюнкцию с подходящей дизъюнкцией вида  $x_j \vee \bar{x}_j$  (что не изменит величины  $K$ , содержащей  $x_i \bar{x}_i \leq M$ , ибо  $x_j \vee \bar{x}_j \geq M$ ) и раскрыть скобки; 3) из каждой пары сравнимых (в отношении  $\leq$ ) конъюнкций ДНФ исключить меньшую. Полученная однозначная ДНФ по смыслу (но не форме) аналогична совершенной ДНФ функций двузначной ДЛ. Любая функция НЛ, отличная от фундаментальной конъюнкции, разложима, т.е. класс неразложимых (элементарных) функций НЛ в алгебре (2) состоит из одних фундаментальных конъюнкций.

Минимизация функций НЛ есть их приведение к форме с минимальным числом вхождений переменных. Минимизация функций НЛ в алгебре (2) разработана лишь для функций, представленных в ДНФ. Ее цель – найти ДНФ с минимальным числом вхождений всех букв  $x_i, \bar{x}_i$ . Процедура минимизации аналогична соответствующей для булевых функций двузначной ДЛ: 1) отыскание всех фундаментальных конъюнкций функции НЛ  $f$  (они играют роль элементарных конъюнкций СДНФ булевой функции) и представление  $f$  в однозначной тупиковой форме; 2) отыскание всех простых импликант функции (как обычно, импликантой функции  $f$  считаем элементарную конъюнкцию  $K$ , такую, что  $K \leq f$ ; если  $K$  не поглощается другими импликантами, она называется простой); 3) нахождение минимального покрытия множества фундаментальных конъюнкций множеством простых импликант (например, с помощью импликантных

таблиц). Минимизация функций НЛ сложнее минимизации булевых функций. Этот факт, а также быстрый рост числа функций НЛ при увеличении числа их аргументов делают актуальной задачу декомпозиции, т.е. представления функции НЛ  $f(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  в виде композиции нескольких функций НЛ с меньшим числом аргументов

$$f(x) = F[f_m(x^m), \dots, f_1(x^1), x^i], \quad x^i \subset x, \quad i = \overline{0, m}. \quad (12)$$

Если множества  $x^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , не пересекаются, декомпозиция называется разделительной, в противном случае – неразделительной. Представление (12) при  $m=1$  называется простой декомпозицией. На сегодня известен лишь алгоритм поиска простой декомпозиции функции НЛ в алгебре (2).

Пусть  $D_x$  – область значений вектора аргументов  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $D_f$  – область значений функции НЛ  $f(x)$  и имеется взаимно-однозначное соответствие

$$(x \in D_x) \Leftrightarrow (f(x) \in D_f). \quad (13)$$

Анализ функции НЛ  $f$  – это нахождение в соответствии с (13) области  $D_x$  по заданным области  $D_f$  и функции  $f$ , а ее синтез – это построение по заданным областям  $D_x$  и  $D_f$  функции  $f$ , реализующей соответствие (13). Методы анализа разработаны для случаев, когда  $f$  –  $m$ -местная дизъюнкция или конъюнкция, а  $D_f$  – полуинтервал или интервал, так что соответствия (13) упрощаются и принимают конструктивную форму. В общем случае, при произвольных  $f$  и  $D_f$ , разбивают  $D_f$  на подобласти – полуинтервалы, решают для каждой соответствующее неравенство НЛ (см. ниже) и объединяют результаты. Задача синтеза функции НЛ в общем случае не имеет единственного решения, а алгоритм ее точного решения неизвестен. Возможный выход: 1) отбросить требование  $x \in D_x$ ; 2) выбрать какую-то типовую функцию  $f(x)$ ; 3) проанализировать  $f(x)$  по заданным условиям  $f \in D_f$ , найти соответствующее условие для  $x: x \in D'_x$ ; 4) если  $D_x \subseteq D'_x$ , то  $f(x)$  – решение задачи. Иначе – переход к другой функции  $f(x)$  и т.д.

Система функций НЛ  $\{f_1, \dots, f_m\}$  называется полной (базисом) в классе  $R$ , если любую функцию из  $R$  можно представить суперпозицией функций  $f_1, \dots, f_m$ . В отличие от ДЛ, где  $R$  задан, а ищутся базисы, в НЛ обычно задан базис, а отыскивается класс  $R$ . Наиболее известные здесь результаты таковы. 1. Система функций  $\{\vee, \wedge\}$  есть базис для класса  $R_1$  тех функций НЛ, которые принимают значение одного из аргументов. 2. Система функций  $\{\vee, \wedge, \bar{\phantom{x}}\}$  есть базис для класса  $R_2$  тех функций НЛ, которые принимают значение одного из аргументов или его

отрицания. 3. Системы  $\{\overline{x_1 \wedge x_2}\}$  и  $\{\overline{x_1 \vee x_2}\}$  являются базисами для класса функций  $R_2$ . 4. Системы  $\{\overline{x_1 \wedge x_2}, \overline{\phantom{x_1 \wedge x_2}}\}$  и  $\{\overline{x_1 \vee x_2}, \overline{\phantom{x_1 \vee x_2}}\}$  являются базисами для класса функций  $R_2$ .

### Список литературы

1. Гинзбург С.А. Математическая непрерывная логика и изображение функций. – М.: Энергия, 1968.
2. Левин В.И. Введение в динамическую теорию конечных автоматов. – Рига: Зинатне, 1975.
3. Левин В.И. Динамика логических устройств и систем. – М.: Энергия, 1980.
4. Коффман А. Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982.
5. Левин В.И. Бесконечнозначная логика в задачах кибернетики. – М.: Радио и связь, 1982.
6. Левин В.И. Структурно-логические методы исследования сложных систем. – М.: Наука, 1987.
7. Шимбирев П.Н. Гибридные непрерывно-логические устройства. – М.: Энергоатомиздат, 1990.
8. Волгин Л.И., Левин В.И. Непрерывная логика. Теория и применения. – Таллинн: АН Эстонии, 1990.
9. Левин В.И. Непрерывная логика. Ее обобщения и применения. I, II // Автоматика и телемеханика. – 1990. – №№ 8, 9.
10. Левин В.И. Методы непрерывной логики в задачах управления // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 3.

#### ***В.И. Левін. Безперервна логіка. історія, теорія, вживання.***

*Розглянуті основні питання безперервної логіки: визначення, властивості, відмінності від дискретних логік. Торкнулися питання історії і вживань.*

***Ключові слова:*** безперервна логіка, логічні функції, форми, базис.

#### ***V.I. Levin. Continuous logic. history, theory, application.***

*The main problems on continuous logic are considered: definitions, properties, difference from discrete logic. The history and applications are affected.*

***Keywords:*** Continuous Logic, Logic Functions, Forms, Basis.

Поступило в редакцию 23.09.2007