Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского
**Серия «Философия. Культурология. Политология. Социология».** Том 23 (62). 2010. № 2. С. 273-278.

***УДК 510.6***

# СЕМАНТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ И СИНТЕЗУ ЛОГИЧЕСКИХ ИСЧИСЛЕНИЙ.

***Титов А.В.***

*Исследуется возможность рассмотреть с единой позиции варианты развития логических исчислений как диалектический процесс, в котором разделению соответствует разработка вариантов логических исчислений как результат разделения алгебраических структур, элементы которых служат значениями оценок формул логического исчисления. Синтез осуществляется путем введения эквивалентности на структурах оценки.*

***Ключевые слова:*** *диалектический процесс, логическое исчисление, эквивалентность.*

**Целью** статьи является исследование возможности на основе рассмотрения оценок на разных типах алгебраических структур представить динамику развития вариантов логических исчислений в их взаимосвязи. И далее, введением отношения эквивалентности на значениях оценки, синтезировать полученные варианты логики в классическую логику с расширением класса моделей, описываемых на языке этой логики.

Приведенная ниже система рассуждений в некоторой мере отражает, по мнению автора, взаимодействие различных сторон логики, описанное Гегелем: «*Логическое* по своей форме имеет три стороны: а) абстрактную, или рассудочную, б) диалектическую, или отрицательно-разумную, в) спекулятивную, или положительно-разумную. Эти три стороны не составляют трех частей логики, а суть *моменты всякого логически реального*, т.е. всякого понятия или всего истинного вообще» [1].

Критика формальной логики предпринималась как со стороны диалектики, так и со стороны формальной логики.

В рамках формальной логики, критика классической логике концентрируется на законах исключенного третьего и противоречия. Результатом стало появление вариантов формальной логики свободной от этих законов, частности, интуиционистской логики и различных вариантов паранепротиворечивой логики.

Развитие формальных логических систем на основе принятия различных вариантов системы суждений или на основе принятия новой аксиоматики можно рассматривать как процесс, состоящий в «снятии такими конечными определениями самих себя и переход их в свою противоположность» [1].

Но разделение можно проводить и на основе разделения структур, на которых принимают значения оценки «суждений».

В классической логике приняты два значения истинности: «истина» и «ложь», со структурой булевой алгебры. Естественность этой структуры для классической логики связана с принятой классификацией суждений по Аристотелю и интерпретацией объема понятия как множества или класса.

Множество всех формул языка нулевого или первого порядка в классической логике является универсальной алгеброй <Fm, $\cap,\cup$, $\Rightarrow$,—, > с тремя бинарными и одной унарной операцией или обобщенной алгеброй <Fm, $\cap,\cup$, $\Rightarrow,\bigcup,\bigcap$—, > с обобщенными операциями $\bigcup$, $\bigcap$**,** соответствующими кванторным приставкам.

Алгебра <Fm, $\cap,\cup$, $\Rightarrow$,—, > формул языка нулевого порядка $L_0$ является свободной в классе R универсальных алгебр <A,$o_1$ ,$o_2$ , $o_3$,$o_4$,> с тремя бинарными операциями $o_1$ ,$o_2$ , $o_3$, и одной унарной операцией $o_4$. Множество $V_0$ всех пропозициональных переменных языка $L_0$ является системой свободных образующих в Fm.

Общепринятое определение оценки заключается в том, что под оценкой языка $L_0$ понимается отображение $\upsilon$:$V_0 \rightarrow$A, где A алгебра подобная алгебре <Fm, $\cap,\cup$, $\Rightarrow$,—, >, что следует, например из того, что оценка может рассматриваться как подстановка. Из этого следует, что отображение $\upsilon$ есть гомоморфизм множества формул в алгебру, элементы, которой служат значениями оценки [2].

Таким образом, в традиционном исчислении высказываний отображение $\varphi$ множества формул в семейство истинностных значений $\varphi$:Fm $\rightarrow$ **B**, есть гомоморфизм со значением в двухэлементной булевой алгебре.

В общем случае алгебра <Fm, $o_1,o_2,o_3,\ldots,o_n$> формул языка нулевого порядка $L_0$ является свободной в классе R универсальных алгебр <A,$o_1,o_2,o_3,\ldots,o_n$,>, в которых операции с одинаковыми индексами имеют одинаковую размерность. Множество $V_0$ всех пропозициональных переменных языка $L_0$ является системой свободных образующих в Fm.

Оценка языка $L_0$ есть отображение $\upsilon$:$V_0 \rightarrow$A, где A алгебра подобная алгебре <Fm, $o_1,o_2,o_3,\ldots,o_n$>, следовательно, как и в предыдущем случае, отображение $\upsilon$ есть гомоморфизм множества формул в алгебру, элементы, которой служат значениями оценки.

Но наличие такого гомоморфизма означает, что если известна структура алгебры A, на которой принимают значения оценки формул языка $L_0$, то эта структура сохраняется и на алгебре формул языка $L_0$ <Fm, $o_1,o_2,o_3,\ldots,o_n$>.

В частности, если значения оценки лежат в булевой алгебре B, то и <Fm, $o_1,o_2,o_3,\ldots,o_n$> – булева алгебра, т.е. <Fm, $o_1,o_2,o_3,\ldots,o_n$>=<Fm, $\cap,\cup$, $\Rightarrow$,—, >.

Наличие гомоморфизма позволяет рассматривать разделение логических исчислений по типам может проходить на основе рассмотрения различных типов оценок.

Пусть $\phi$- формула языка структуры ***K,*** и $\phi_k$ оценка этой формулы в **B**={0,1}. $\|\phi_k\|$ оценка этой формулы в $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$, т.е оценкой будем называть функцию вида $\|\ \|$: Fm$\rightarrow\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$, где V число переменных языка L, а $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$ решетка, элементами которой служат подмножества $\boldsymbol{K}^V$. Булева решетка $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$ есть расширение решетки **B,** в котором $\boldsymbol{K}^V$=1, Ø=0. Однако в структуре $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$ значением оценки служит любое подмножество J $\subseteq\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$. По аналогии с [3] введем предикат $Tr_j$ ($\phi_k$)$\equiv$ ($\|\phi_k\|\in$j), где j – некоторое подсемейство $\boldsymbol{P}(\ \boldsymbol{K}^V)$. Нас будет интересовать как выбор семейства j может повлиять на связь между оценками $\phi_k$ и $Tr_j$ ($\phi_k$), различие которых служит основанием для разделения типов логических исчислений.

В частности, в нестанданртном анализе, выбор в качестве j ультрафильтра в $\boldsymbol{P}(I)$ позволяет заменить $Tr_j$ ($\phi_k$) «обычной» истинностью суждения $\phi_k$ о структуре $\boldsymbol{K}^I$. Поскольку для ультрапроизведений $\boldsymbol{K}^I|j \equiv \boldsymbol{K}^I|\sim_j$, имеем $\phi_{k|j}([f_1], [f_2],\ldots[f_n]) \Leftrightarrow ([\phi_k(f_1, f_2,\ldots,f_n)] \in j)$, где $[f_i] \in \boldsymbol{K}^I|j$. Это обеспечивает эквивалентность обеих семантик

Если рассматривается оценка со значениями в $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$, т.е. оценка $\|\phi_k\|:\phi \rightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$, то при условии, что j ультрафильтр над $\boldsymbol{K}^V$ получим оценку в ультрапроизведении $\boldsymbol{K}^V|\sim_j$, т.е. в булевой алгебре $\mathbf{B}=\{0,1\}$.

Рассмотрим случай, когда j фильтр над импликативной решеткой (псевдобулевой алгеброй) $\mathfrak{I}(\boldsymbol{K}^V) \subseteq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$, элементы которого являются значением оценки некоторого суждения $\phi_k$ о структуре $\boldsymbol{K}$.

Пусть $\|\phi_k\|$ оценка формулы $\phi_k$ в $\mathfrak{I}(\boldsymbol{K}^V)$. Введем отношение ~ между оценками, причем $\|\phi_k\| \sim \|\phi_k^1\| \Leftrightarrow \|\phi_k\| \in j$ и $\|\phi_k^1\| \in j$.

Отношение ~ есть отношение эквивалентности на множестве оценок, кроме того, отношение эквивалентности $\sim_j$ такое, что $\|\phi_k\| \sim_j \|\phi_k^1\| \Leftrightarrow \|\phi_k\| \Rightarrow \|\phi_k^1\|$ и $\|\phi_k^1\| \Rightarrow \|\phi_k\|$ [2], является расширением отношения эквивалентности ~.

Тогда фактор множество $\mathfrak{I}(\boldsymbol{K}^V)|\sim_j$ есть упорядоченное множество оценок, такое что при $\|\phi_k^1\| \in j$ $[\|\phi_k^1\|]=1_{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)|\sim j}$. В случае, когда j, как выше, – максимальный фильтр $\mathfrak{I}(\boldsymbol{K}^V)|\sim_j=\{0,1\}$ и логика индуцированная оценкой есть классическая логика.

Пусть структура $\mathfrak{I}(\boldsymbol{K}^V) \subseteq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^n)$ есть решетка A с нулем и единицей вида <A, $\cap,\cup, \rightarrow, \div, \neg, \ulcorner$ , 0,1>, где $\div$ относительная разность, $\ulcorner a=1\div a$, $\neg a= a\rightarrow 0$, т.е. решетка, в которой два вида дополнения. Несложно показать, что оценке со значениями структуре A соответствует H-B логика, в которой закон противоречия не выполняется для отрицания $\ulcorner$, т.е. оценка $\|a \wedge a\| \geq 0$ [4].

Структура, на которой принимает значение оценка формул формального языка и и отношения эквивалентности на ней определяют не только тип логики, но и правила вывода, соответствующие типу логики. Например, приведенное в [3] требование выполнимости правила modus ponens, которое на языке оценок выглядит как: $\|\phi_k\|=1$, $\|\phi_k \Rightarrow \phi_k^1\|=1$ влечет $\|\phi_k^1\|=1$ (1) есть частный случай правила $\|\phi_k\| \in j$ , $\|\phi_k \Rightarrow \phi_k^1\| \in j$ влечет $\|\phi_k^1\| \in j$, (2) где j – фильтр на алгебре оценок. В modus ponens j=1. Но (2) свойство импликативной решетки. Таким образом, modus ponens в форме (2) является правилом вывода для всех логик со значениями на импликативных решетках (псевдобулевых алгебрах).

Наличие гомоморфизма $\varphi$:Fm $\rightarrow$ **B** из алгебры формул <Fm, $o_1,o_2,o_3,\ldots,o_n$> формального языка L является в подобную ей алгебру значений оценок <A,$o_1,o_2,o_3,\ldots,o_n$,> позволяет рассматривать деление логических исчислений по типам, которое основано на рассмотрении различных типов оценок. В тоже время, это позволяет рассматривать варианты синтеза разных типов логических исчислений на основе отождествления значений оценок на структурах оценки различного типа, в результате которого изначально различные структуры оценки естественным гомоморфизмом отображаются в изоморфные алгебры оценки. В этом случае окончательно оценка рассматривается как композиция гомоморфизмов со значением в одной области прибытия.

Пусть F – фильтр и A – импликативная решетка. $\forall a,b \in A$ Считаем, что $a \leq_F b \Leftrightarrow a \Rightarrow b \in F$. В [2] показано, что отношение $\leq_F$ является отношением предпорядка. Введенный предпорядок порождает отношение эквивалентности $\approx_F$, $a \approx_F b \Leftrightarrow a \Rightarrow b \in F$ и $b \Rightarrow a \in F$, т.е. $a \approx_F b \Leftrightarrow a \leq_F b \wedge b \leq_F a$.

Отношение предпорядка определяет отношение порядка $\leq$ на фактор-множестве $A/F = A/\approx_F$, которое является импликативной решеткой, а эквивалентность $\approx_F$ конгруэнцией по отношению к операциям на решетке $A/F$.

Обратно, если ~ конгруэнция в импликативной решетке A, то множество F = {a | a $\in$ A $\wedge$ a ~ 1} – фильтр и отношение ~ есть эквивалентность $\approx_F$, определяемая фильтром F.

Пусть Ω – полная гейтингова алгебра, на которой принимают значения формулы формального языка *L*. F – фильтр на алгебре [a] ≥ [b]. Пусть значения оценок a,b∈Ω эквивалентны, если $a \approx_F b$, тогда фактор-множество $\Omega / F$ упорядочено отношением ≥, таким что ∀[a],[b] ∈Ω [a] ≥ [b]⇔a$\geq_F$ b. Если F- ультрафильтр, то фактор-множество $\Omega / F$ имеет ровно два элемента. Оценка на алгебре Ω композицией гомоморфизмов сводится к оценке на двухэлементной булевой алгебре. Такая оценка приводит к соотношению, которое известно как теорема Лося, используемая в нестандартном анализе для доказательства эквивалентности оценок формул со значениями переменных в стандартном поле действительных чисел и его нестандартном расширении.

Выберем в качестве F простой фильтр. Если Ω булева алгебра, то оценка на $\Omega / F$ снова имеет лишь два значения, поскольку в булевой алгебре простой фильтр является максимальным, и рассматриваемая логика остается классической. Если Ω гейтингова алгебра <**Ω**, ∩,∪, →,−,0,1>, не являющаяся булевой и F простой не максимальный фильтр, то дополнение к нему в решетке Ω есть простой идеал I. Тогда найдутся элементы a, -a алгебры Ω, где –a псевдодополнение элемента a, такие, что a, -a∈I. Это означает, что a -a∈I, но по построению I простой идеал, следовательно, a -a<1. Это значит, что рассматриваемая логика со значением оценки на алгебре Ω является интуиционистской.

Выберем в качестве Ω алгебру вида <Ω, ∩,∪,÷,¬ ,0,1>, где ÷ бинарная операция, являющаяся псевдоразностью элементов решетки Ω, ¬ - дополнение элемента $a \in \Omega$, представленного как ¬ *a*= 1÷*a*. Пусть I идеал на $\forall a,b \in \Omega$ считаем, что $a \leq_I b \Leftrightarrow a \div b \in I$. Легко показать, что отношение $\leq_I$ является отношением предпорядка. Введенный предпорядок порождает отношение эквивалентности $\approx_I$, $a \approx_I b \Leftrightarrow a \div b \in I$ и $b \Rightarrow a \in I$, т.е. $a \approx_I b \Leftrightarrow a \leq_I b \wedge b \leq_I a$.

Отношение предпорядка $\leq_{\mathrm{I}}$ определяет отношение порядка $\leq$ на фактор-множестве $\Omega/\mathrm{I} = \Omega/\approx_{\mathrm{I}}$, а эквивалентность $\approx_{\mathrm{I}}$ конгруэнцией по отношению к операциям на решетке $\Omega/\mathrm{I}$.

Обратно, если ~ конгруэнция на решетке Ω, то множество $\mathrm{I} = \{a \mid a \in \Omega \wedge a \sim 0\}$ – фильтр и отношение ~ есть эквивалентность $\approx_{\mathrm{I}}$, определяемая идеалом I.

Выберем в качестве I простой идеал. Если Ω булева алгебра, то оценка на решетке $\Omega/\mathrm{I}$ имеет лишь два значения, поскольку в булевой алгебре простой идеал является максимальным, и рассматриваемая логика остается классической. Если Ω не является булевой и I простой не максимальный идеал, то дополнение к нему в решетке Ω есть простой фильтр F. Тогда найдутся элементы a, ┓ a алгебры Ω, где ┓ a =1÷a, такие, что a, ┓ a∈F. Это означает, что a∩┓ a∈F, но по построению F простой фильтр, следовательно, a∩┓ a>0. Следовательно, рассмотрение оценок со значениями на алгебре $\Omega/\mathrm{I}$ приводят паранепротиворечивой логике.

Приведенные выкладки показывают, что в зависимости от выбора алгебраической структуры, на которой принимают значения оценки формул языка формального языка *L* и выбора отношения эквивалентности на множестве значений оценок, может быть получена как классическая так и не классическая теории одной и той же алгебраической системы ***K***.

В то же время отношения эквивалентности определенного типа, как это уже было показано на примере нестандартного анализа, могут приводить к синтезу классической логики, в том числе для вариантов не классического логического исчисления [5,6].

Пусть на булевой решетке **Ω** (например, решетке подмножеств) оценки введена некоторая топология $\mathfrak{I}$(**Ω**). Определим операции на алгебре $\mathfrak{I}$(**Ω**) следующим образом:

*b*÷*a*=**C**(-*a*) ∩ *b*, *a*→*b*=I(-*a*) ∪ *b*, ┓ *a*= 1÷*a*=C(1-*a*), ─*a*= *a*→0=I(1-*a*), где **C**(*a*) означает замыкание элемента решетки *a*, I(*a*)- операцию взятия внутренности элемента решетки *a*. Бинарные операции на **Ω** соответствуют обычным решетчатым операциям.

Для любого элемента решетки *a*, имеем *a* ∩─*a*=0, *a*∪─*a*≤1, причем для открытых элементов решетки, т.е. такие, что *a*=I(*a*), при условии, что дополнение элемента не является открыто-замкнутым, неравенство становится строгим. Так же для любого элемента решетки имеем *a* ∩┓ *a* ≥0, *a*∪┓ *a* =1. Для замкнутых элементов, т.е. таких, что *a*=C(*a*), при условии, что дополнение элемента не является открыто-замкнутым, неравенство становится строгим. Топологическая булева алгебра <**Ω**, ∩,∪, →,÷,─,┓ , I, C, 0,1> с введенными выше операциями становится вариантом H-B исчисления, описанного выше [3].

Пусть **F**- максимальный фильтр в **Ω,** тогда **I**=**Ω-F,** простой идеал. Определим отношение эквивалентности $\approx_F$ на алгебре значений оценок **Ω.** Будем считать $a \approx_F b \Leftrightarrow a \Rightarrow b \in F$ и $b \Rightarrow a \in F$, аналогично $a \approx_{\mathrm{I}} b \Leftrightarrow a \div b \in \mathrm{I}$ и $b \Rightarrow a \in \mathrm{I}$.

Фактор множества $\Omega / \mathrm{I} = \Omega / \approx_{\mathrm{I}}$ и $\Omega / F = \Omega / \approx_F$ состоят каждое из двух элементов и являются булевыми решетками.

**Вывод.** Оценки на структурах $\Omega / \mathrm{I} = \Omega / \approx_{\mathrm{I}}$ и $\Omega / F = \Omega / \approx_F$ приводят к классическому логическому исчислению с алгеброй подобной булевой алгебре $< \Omega / F, \cap, \cup, \Rightarrow, -, >$.

## Список литературы

1. Г.В.Ф. Гегель. Энциклопедия философских наук / Г.В.Ф. Гегель // Сочинения. Т.1. – М., Мысль, 1989. – 452 с.
2. Рассева Е. Математика метаматематики / Рассева Е., Сикорский Р. – М. «Наука», 1972. – 591 с.
3. Любецкий В.А. Некоторые применения теории топосов к изучению алгебраических систем / Любецкий В.А. // П.Т. Джонсон. Теория топосов. – М., «Наука», 1986. – С. 376 – 433.
4. Васюков В.Л. Категорная логика / Васюков В.Л. – М. АНО Институт логики, 2005. – 194 с.
5. Титов А.В. Семантический анализ логических исчислений / Титов А.В. // Материалы Второй международной научной конференции «Философия математики актуальные проблемы» – М.: МГУ, 2009. – С. 140-144.
6. Титов А.В. Построение классической и неклассической теорий алгебраической системы выбором эквивалентности на значениях оценки / Титов А.В. // Материалы международной конференции «Шестые Смирновские чтения по логике». – М., 2009. – С. 36-38.

***Тітов А.В.*** **Семантичний підхід до аналізу та синтезу логічних числень** // Вчені записки Таврійського національного університету ім. В.І. Вернадського. Серія: Філософія. Культурологія. Політологія. Соціологія. – 2010. – Т. 23 (62). – № 2. – С. 273-278.

Вивчається можливість розглядати з єдиної позиції варіанти розвитку логічних числень як діалектичний процес, у якому розділенню відповідає розробка варіантів логічних числень як результат розділення алгебраїчних структур, елементи яких виступають значеннями оцінок формул логічного числення. Синтез здійснюється шляхом введення еквівалентності на структурах оцінки.

***Ключові слова:*** діалектичний процес, логічне числення, еквівалентність.

***Titov A.V.*** **Semantic approach to the analysis and synthesis of logics** // Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. Series: Philosophy. Culturology. Political sciences. Sociology. – 2010. – Vol. 23 (62). – № 2. – P. 273-278.

In the article the approach to classifications of logics on the base of value is described. In the base of this approach to see about structure of value is lie. Described the connection of this structure of value and logics. The relations of equivalence and order for values on implication lattice are described. Described the applications of this relation in models of non – standard analysis. Here to demonstrate the possibility of classification of logics on base of classifications of algebras of values with equivalence relation on set of values.

***Keywords:*** classifications of logics, algebras of values.

Поступило в редакцию 13.10.2009