Ученые записки Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского
Философия. Политология. Культурология. Том 3 (69). 2017. № 4. С. 66–83.

УДК [114:117]::530.1

О НЕАТРИБУТИВНОСТИ ИНДИКАТОРОВ ФРАКТАЛЬНОСТИ, СВЯЗАННЫХ С ХАУСДОРФОВОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ

Зудилина Н. В.

Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация

E-mail: nadiya.z17@gmail.com

Выделено два индикатора фрактальности, связанных с хаусдорфовой размерностью. Первый индикатор фрактальности объектов и процессов, подразумеваемый в этимологическом значении основы слова «фрактал», – дробное значение хаусдорфовой размерности объекта или процесса (далее – индикатор «дробность»). Второй индикатор фрактальности, представленный в дефинициях фрактала, основанных на хаусдорфовой размерности, – превышение значения топологической размерности (DT) значением хаусдорфовой размерности (D), или D > DT (далее – индикатор «превышение»).
Объекты и процессы, признанные в современной науке фракталами, были разделены по критерию соотношения значений их хаусдорфовой и топологической размерностей на три группы: 1) фракталы с целым значением хаусдорфовой размерности, равным значению топологической размерности, следовательно, у них отсутствуют индикаторы «дробность» и «превышение»; 2) фракталы с дробным значением хаусдорфовой размерности, превышающим значение топологической размерности меньше чем на единицу, следовательно, у них присутствуют индикаторы «дробность» и «превышение»; 3) фракталы с целым значением хаусдорфовой размерности, превышающим значение топологической размерности на единицу, а значит, у них отсутствует индикатор «дробность».
Все три группы фракталов и лежащие в их основе варианты соотношения значений хаусдорфовой и топологической размерностей удовлетворяют неравенству Шпилрайна: (D ≥ DT). Если мы приписываем индикатору «превышение», а в особенности индикатору «дробность» статус атрибутивного (обязательного) индикатора, это означает отступление от неравенства Шпилрайна, такое отступление неоправданно сужает класс фракталов, поскольку индикатор «превышение» позволяет причислять к фракталам только объекты второй и третьей групп, а индикатор «дробность» (являющийся частным случаем индикатора «превышение») позволяет причислять к фракталам только объекты второй группы.
Несмотря на отсутствие одного или обоих предложенных Мандельбротом индикаторов фрактальности, связанных с хаусдорфовой размерностью, некоторые объекты или процессы признаны научным сообществом фракталами на основе наличия у них другого индикатора – широко трактуемого самоподобия. Таким образом, индикаторы «превышение» и «дробность» не являются атрибутивными индикаторами фрактальности. Поиск фундаментальной характеристики фракталов, которая связывает собой самоподобие и хаусдорфову размерность и, предположительно, обеспечивает корреляцию значений обеих величин – размерности самоподобия и хаусдорфовой размерности фрактала, является одним из наиболее важных и перспективных направлений в исследовании фракталов.

Ключевые слова: фрактал, хаусдорфова размерность (размерность Хаусдорфа – Безиковича), топологическая размерность, индикатор фрактальности, неравенство Шпилрайна, самоподобие, Бенуа Мандельброт.

Введение

Фрактальные структуры обнаружены повсюду, на любых масштабах нашей вселенной – от её глобальной топологической структуры и до субатомного уровня [1]. Фракталы исследуют в математике и теории информации, физике и химии, биологии, экологии и медицине. Помимо фрактальной геометрии [2], развитой основателем теории фракталов Бенуа Мандельбротом, появились и такие направления, как фрактальная космология [3] и фрактальная физиология [4].

В процессе обнаружения вездесущности фракталов становится очевидным, что принцип фрактальности является универсальным и в той или иной мере определяет организацию нашего мира. По этой причине исследование объектов с точки зрения их фрактальности является общеприменимой, мультидисциплинарной методологией, которая может быть использована как для исследований систем с позиции экстенсивности, то есть для изучения объектов различных масштабов (от микро- до мегауровня), так и для исследований с позиции интенсивности, то есть изучения объекта на различных масштабах его рассмотрения. Кроме того, фрактальная методология применима как к объектам информационной природы (например, компьютерным программам и данным), так и к объектам информационно-материальной природы (то есть физическим объектам естественного или искусственного происхождения). Поэтому фрактальные модели и методы успешно применяются в экономике и финансах, компьютерных и информационных технологиях, радиотехнике и электронике, географии и геодезии, астрофизике и геофизике, когнитивной науке и т. д. Как отмечают исследователи, важность фракталов состоит в том, что они изменяют наиболее фундаментальные способы, с помощью которых мы анализируем и понимаем экспериментальные данные [5, с. 180].

Отличительным признаком фрактальной методологии является использование в ней, помимо трёх экстенсивных (пространственных) координат – длины, ширины и высоты, ещё одной координаты, являющейся экстенсивно-интенсивной, или пространственно-информационной. Эта координата была названа А. Д. Изотовым и Ф. И. Маврикиди координатой делимости [6]. Если аспект экстенсивности в координате делимости связан с протяжённостью в пространстве, то аспект интенсивности – с плотностью информации. Благодаря введению этой координаты, фиксирующей многомасштабность и иерархичность объекта, обеспечивается новый, экстенсивно-интенсивный способ видения объекта, в противоположность традиционному, экстенсивному. Экстенсивно-интенсивный способ видения объекта выявляет его бинарную, дискретно-континуальную природу, позволяя объяснить, каким образом объект может быть одновременно частью и целым, одним и множеством, материальным и информационным. Поэтому есть основания полагать, что фрактальная методология – это путь, следуя по которому, мы сможем приблизиться к решению антиномий, если и не всех, то, по крайней мере, некоторых из них [6, с. 11].

Вышеизложенное даёт основания полагать, что развитие фрактальной методологии является актуальной задачей не только для современной науки и философии, но и для многих других сфер человеческой деятельности. Однако для того чтобы адекватно и эффективно применять фрактальную методологию, необходимо иметь точные критерии и индикаторы того, что такое фрактал. Решение данной проблемы затруднено следующим обстоятельством: в зависимости от того, какие критерии фрактальности будут выбраны, индикаторами фрактальности будут считаться либо одни, либо другие признаки объекта или процесса. Поэтому актуальной исследовательской задачей является определение того, какие из характеристик объектов или процессов являются атрибутивными, то есть обязательными для того, чтобы причислить данный объект или процесс к классу фракталов, а какие – неатрибутивными; иными словами, необходимо определить индикаторы фрактальности.

Объём данной статьи позволил рассмотреть атрибутивность/неатрибутивность только тех индикаторов фрактальности, которые выделены на основе критериев, связанных с хаусдорфовой размерностью (она же – размерность Хаусдорфа – Безиковича). Хаусдорфова размерность является наиболее общей среди различных видов фрактальных размерностей и одной из ключевых величин, характеризующих фракталы. Дефиниции фрактала, в которых в качестве критерия фрактальности фигурирует самоподобие, остались за рамками рассмотрения в данной работе. Также по причине ограниченности объёма статьи материалом для выявления индикаторов фрактальности стали только те из дефиниций, основанных на хаусдорфовой размерности, которые предложены основателем фрактальной геометрии Бенуа Мандельбротом.

Цель работы – выяснить, являются ли индикаторы фрактальности, связанные с хаусдорфовой размерностью, атрибутивными для фракталов.

1. О топологической и хаусдорфовой размерностях

Пространство, в котором, согласно привычной для нас модели восприятия, есть три измерения – длина, ширина и высота, – это трёхмерное пространство целой размерности, то есть пространство с топологической размерностью 3.

Существуют различные виды топологических размерностей. Один из основных видов – это размерность Лебега (англ. Lebesgue covering dimension), которую часто называют просто топологической размерностью (математическое определение размерности Лебега см. в [7, с. 215]).

Топологическую размерность принято обозначать как DT. Топологическая размерность точки – 0, линии – 1, поверхности – 2, куба – 3. Все объёмные тела в таком пространстве тоже рассматриваются как трёхмерные.

Однако само по себе пространство и объекты в нём, на самом деле, не трёхмерны – трёхмерна лишь наша модель пространства, эта модель создана в соответствии со способностями человеческого восприятия. Расширив способность восприятия, например, с помощью соответствующего оборудования, мы можем воспринимать пространство иным образом. Так, например, в теории струн утверждается, что помимо трёх пространственных измерений и одного временно́го на квантовом уровне существует ещё шесть компактных, свёрнутых пространственных измерений, недоступных нашему непосредственному восприятию [8, с. 275]. Поэтому в модели теории струн существует девять пространственных измерений и одно временно́е.

Оказалось также, что кроме моделей пространства с бо́льшим чем три количеством целых измерений можно вести речь и о пространствах дробной топологической размерности [9, с. 184] или (по-другому) пространств дробной меры [10; 11, с. 174].

Кроме топологических размерностей существуют также метрические размерности. Если топологические размерности дают нам понятие геометрической размерности для топологического пространства [12, с. 12], то метрические размерности количественно характеризуют метрические пространства. Одной из метрических размерностей является хаусдорфова размерность, которая определяется для метрических пространств [12, с. 12]. Хаусдорфова размерность обозначается символом D. Математическое определение хаусдорфовой размерности см. в [13, с. 779].

Поскольку хаусдорфова размерность является наиболее общей из различных видов фрактальных размерностей, то её часто называют просто фрактальной размерностью. Однако если придерживаться точного использования терминологии, то понятие «фрактальная размерность» шире термина «хаусдорфова размерность», так как помимо хаусдорфовой размерности существуют и другие варианты фрактальной размерности. Как отмечает Мандельброт, «*фрактальная размерность*, которую я защищаю, *и все ее приемлемые варианты* являются не топологическими, а метрическими понятиями (курсив мой. – Н. З.)» [2, с. 357].

Перейдём к рассмотрению фракталов. Фракталы бывают двух типов – математические и физические. Значение хаусдорфовой размерности математических фракталов является, как правило, дробным числом. Например, канторово совершенное множество ($D \approx 0{,}6309$ [14, с. 20]), кривая («снежинка») Коха ($D \approx 1{,}2619$ [15, с. 102]), аттрактор Фейгенбаума ($D \approx 0.538$ [16]) и др. Однако в некоторых случаях значение хаусдорфовой размерности математических фракталов является целым числом, о чём будет подробнее сказано в следующем разделе.

Что касается физических фракталов, в том числе природных фрактальных объектов и процессов, то значение их хаусдорфовой размерности почти всегда является дробным числом [2, с. 15]. Например, дробным является значение хаусдорфовой размерности береговых линий Великобритании ($D \approx 1{,}25$ [17, с. 637]) и Норвегии ($D \approx 1{,}52$ [18, с. 16]), значение хаусдорфовой размерности поверхности человеческого мозга ($D \approx 2{,}79$ [19, с. 64]) и т. д.

Тем не менее и среди физических фракталов (хотя и реже, чем среди математических) встречаются объекты и процессы с целочисленными значениями хаусдорфовой размерности. Например, значение хаусдорфовой размерности следов броуновского движения $D=2$ [2, с. 12].

Итак, хаусдорфова размерность фракталов характеризует не топологическое, а метрическое пространство фракталов. Хаусдорфову размерность часто называют просто «фрактальной размерностью». Среди математических фракталов целочисленное значение хаусдорфовой размерности встречается чаще, чем среди физических фракталов, однако и математические, и физические фракталы чаще всего обладают дробным значением хаусдорфовой размерности.

2. Первый индикатор фрактальности, связанный с хаусдорфовой размерностью, и примеры его отсутствия у фракталов

2.1. Дробность значения хаусдорфовой размерности как индикатор фрактальности, подразумеваемый в этимологическом значении основы слова «фрактал»

Что же такое фрактал? Дать определение фракталу нелегко. Исследователи справедливо отмечают неясность и многозначность дефиниций фрактала (см., например [20, с. 372]). Отсутствует такая базовая дефиниция фрактала, которая была бы достаточно универсальной, чтобы играть роль объединяющей основы для всех частных вариантов определений фрактала, используемых при решении конкретных задач.

Исследованные автором дефиниции фрактала можно разделить на три группы: 1) определения, основанные на хаусдорфовой размерности; 2) дефиниции, основанные на самоподобии (включая скейлинг, или масштабную инвариантность); 3) определения, упоминающие и хаусдорфову размерность, и самоподобие, но без указания той основы, которая их объединяет.

Очевидно, что наиболее полными определениями являются дефиниции третьей группы. Однако на данный момент автору статьи не удалось найти примеры определений третьей группы, в которых была бы указана некая характеристика фрактала, связывающая значение хаусдорфовой размерности и значение размерности самоподобия и являющаяся основой, обеспечивающей корреляцию этих значений во фрактале. С нашей точки зрения, поиск такой характеристики является одним из наиболее важных и перспективных направлений в исследовании фракталов.

Как было пояснено во введении, по причине малого объёма жанра статьи мы рассмотрим в данной работе только те дефиниции, которые основаны на хаусдорфовой размерности, то есть определения первой из трёх групп, и только те из определений данной группы, которые предложены Бенуа Мандельбротом.

Перейдём к рассмотрению первого индикатора фрактальности, связанного с хаусдорфовой размерностью.

Указание на первый индикатор фрактальности заложено в само́м неологизме «фрактал». Придуманное Мандельбротом слово «фрактал» было сконструировано им на основе латинского слова fractus, означающего «раздробленный», «разбитый», «ломанный» (слово fractus является причастием прошедшего времени латинского frangere [21, с. 229] – в переводе «ломать», «разбивать», «раздроблять» [22, с. 438–439]).

Как мы видим, этимология слова «фрактал» ясно указывает на наличие дробности, можно с уверенностью утверждать, что в данном случае это указание на дробность значения хаусдорфовой размерности. Приведём высказывания самого Мандельброта, подтверждающие это.

Как отмечает Мандельброт, в 1975 году он показал, что главной чертой «фрактальных» множеств является, как правило, дробная хаусдорфова размерность [23, с. 119].

Несколькими годами позже он поясняет, почему ввёл новое понятие «фрактал»: «Для всего евклидова D=DT. Но почти все множества в этом Эссе (в монографии Мандельброта «Фрактальная геометрия природы». – Н. З.) удовлетворяют D>DT (то есть это множества, у которых хаусдорфова размерность превышает топологическую. – Н.З.). Не было термина, чтобы обозначить такие множества, что привело меня к изобретению термина фрактал…» [2, с. 15]. В связи с приведённым высказыванием напомним, что превышение хаусдорфовой размерностью топологической размерности свидетельствует о дробности хаусдорфовой размерности. Причина этого в том, что значение топологической размерности – это всегда целое число [2, с. 15], когда хаусдорфова размерность превышает топологическую, то это означает, что хаусдорфова размерность является дробной (далее будет показано, что иногда значение хаусдорфовой размерности превышает значение топологической ровно на единицу, следовательно, является целым, но такие случаи редки).

Итак, приведённые выше высказывания Мандельброта подтверждают, что он изобрёл слово «фрактал» именно для обозначения объектов и процессов с дробным значением хаусдорфовой размерности.

Отметим также, что главной задачей для Мандельброта в первый период разработки фрактальной геометрии было выделение фракталов из множества других объектов. Дробное значение хаусдорфовой размерности явилось тем специфическим, математически точным индикатором, на основании которого это можно было сделать, и Мандельброт воспользовался этим, совершив с помощью этого индикатора первичное отделение фрактальных объектов от нефрактальных.

Подведём итог. Первым критерием фрактальности объекта или процесса, связанным с хаусдорфовой размерностью, является значение хаусдорфовой размерности, а соответствующим индикатором фрактальности, заложенным Мандельбротом в этимологическом значении основы слова «фрактал», является дробное значение хаусдорфовой размерности, или кратко – индикатор «дробность».

2.2. Примеры фракталов, у которых отсутствует индикатор «дробность»

В предыдущем подразделе мы рассмотрели первый индикатор фрактальности – индикатор «дробность». Однако существуют фракталы, у которых отсутствует данный индикатор. Это фракталы, у которых значение хаусдорфовой размерности хотя и превышает значение топологической размерности, но является целочисленным. Как известно, значение топологической размерности кривой равно 1. Однако существует целый ряд фракталов-кривых, у которых значение хаусдорфовой размерности равно 2. К их числу относятся кривая Гильберта (D = 2), кривая Лебега (D = 2), кривая дракона (D = 2), кривая Госпера (D = 2), кривая Мура (D = 2) и др.

Согласно Мандельброту, каждое множество с нецелой хаусдорфовой размерностью D является фракталом [2, с. 15]. Однако если построить обратное утверждение – «каждое множество с целой хаусдорфовой размерностью D не является фракталом», – оно окажется неверным, так как некоторые множества с целой размерностью являются фракталами.

Итак, хотя у объектов и процессов с целой хаусдорфовой размерностью отсутствует первый индикатор – дробность значения хаусдорфовой размерности, тем не менее они признаны фракталами на основании наличия других характеристик. Из этого следует, что дробность значения хаусдорфовой размерности не является атрибутивным индикатором фрактальности объектов и процессов и отсутствие этого индикатора не является достаточным основанием для исключения объекта или процесса из класса фракталов.

3. Второй индикатор фрактальности, связанный с хаусдорфовой размерностью, и пример фрактала, у которого отсутствуют оба индикатора фрактальности, связанные с хаусдорфовой размерностью

3.1. Превышение значением хаусдорфовой размерности значения топологической размерности как индикатор фрактальности

Впервые понятие «фрактал» было представлено Мандельбротом в 1975 году, в его монографии, написанной на французском языке [24]. Однако в этом труде не было дано точной, математической дефиниции. Через два года, в 1977 году, в монографии на английском языке [25] Мандельброт даёт первое математическое определение фрактала, основанное на хаусдорфовой размерности. Это определение 1977 года Бенуа Мандельброт приводит в труде «Фрактальная геометрия природы» (1982): «Фрактальное множество… это множество в метрическом пространстве, для которого размерность Хаусдорфа-Безиковича D > (больше. – Н. З.) топологической размерности DT» [2, с. 361].

Если в вышеприведённой дефиниции фрактала индикатор фрактальности выражен символами, в виде строгого неравенства D > DT, то во втором варианте этой же дефиниции (в 1980 году [26, с. 249] и в 1982 [2, с. 15]) Мандельброт формулирует выдвинутый им индикатор словесно: «Фрактал является по определению множеством, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого *строго превышает* топологическую размерность (курсив мой. – Н. З.)» [2, с. 15].

Обратим теперь внимание на одну важную для наших последующих рассуждений деталь. В математике тот тип неравенства, с помощью которого выражен рассматриваемый нами индикатор, D > DT, называется строгим неравенством (нестрогое неравенство в данном случае выглядело бы так: D ≥ DT). Хотя в символьном обозначении индикатора (D > DT) знак > читается как «больше», но в словесной формулировке индикатора Мандельброт выражает данный знак словосочетанием «строго больше» по аналогии с названием типа неравенства, с помощью которого выражен данный индикатор («строгое неравенство»). Говоря, что хаусдорфова размерность фрактала не просто больше топологической, а строго больше топологической, Мандельброт подчёркивает, что значение хаусдорфовой размерности не может быть равным значению топологической размерности, а должно быть только больше значения топологической размерности.

Итак, индикатором фрактальности (в том виде, каком он сформулирован Мандельбротом) является строгое превышение хаусдорфовой размерностью топологической размерности. Для краткости будем называть этот индикатор индикатором «превышение».

Для лучшего осмысления той роли, которую должен был бы играть индикатор «превышение», напомним, что: 1) значение топологической размерности всегда целочисленно [2, с. 15]; 2) в системе евклидовой геометрии любой объект является гладким объектом, а у гладких, евклидовых объектов хаусдорфова размерность равна топологической размерности: «для всего евклидова D = DT» [2, с. 15]. Поэтому если бы значение хаусдорфовой размерности фракталов, будучи дробным или целым числом, всегда превышало значение топологической размерности, то есть всегда наличествовал бы индикатор «превышение», это позволяло бы точно отделять фрактальные объекты от гладких, евклидовых. Как уже говорилось ранее, нахождение такого индикатора-демаркатора было одной из главных задач Мандельброта на первом этапе разработки фрактальной геометрии.

Однако значение хаусдорфовой размерности фракталов не всегда превышает значение их топологической размерности, иными словами, у фракталов не всегда наличествует индикатор «превышение». Об этом будет подробно рассказано в следующем подразделе.

Подведём итог. Второй критерий фрактальности, связанный с хаусдорфовой размерностью, – это соотношение значений хаусдорфовой и топологической размерностей объекта или процесса. Соответственно, второй индикатор фрактальности, предложенный Мандельбротом, – это строгое превышение значением хаусдорфовой размерности значения топологической размерности, или кратко – индикатор «превышение».

3.2. Фрактал «Дерево Пифагора» как пример фрактала, у которого отсутствуют индикатор «дробность» и индикатор «превышение»

Говоря о соотношении значений фрактальной и топологической размерностей объекта со значением размерности евклидова пространства, в котором находится данный объект, Мандельброт рассуждает следующим образом: «…D может быть целым числом (не большим, чем E (E обозначает размерность евклидова, трёхмерного пространства. – Н. З.), но *строго большим*, чем DT). Я называю D фрактальной размерностью (курсив мой. – Н. З.)» [2, с. 15] (в данном случае понятия «фрактальная размерность» и «хаусдорфова размерность» являются для Мандельброта взаимозаменяемыми). Иными словами, допустимо отсутствие индикатора «дробность», но обязательно должен наличествовать второй индикатор – «превышение».

Однако, несмотря на данное утверждение, изредка встречаются фракталы с такой целой хаусдорфовой размерностью, которая равна их топологической размерности, а не превышает её. То есть у таких фракталов отсутствует не только индикатор «дробность», но и индикатор «превышение». Примером такого фрактала является фрактал «Дерево Пифагора» (англ. fractal «Pythagorean tree (Pythagoras tree)») [27, с. 84–86], который состоит из итерируемых квадратов. Как и у гладких, евклидовых объектов, значение хаусдорфовой размерности «Дерева Пифагора» равно значению топологической размерности: D=DT=2 [28, с. 124]. То есть фрактал «Дерево Пифагора» с точки зрения топологической размерности является двумерным евклидовым (гладким) объектом, а с точки зрения метрической (в данном случае – хаусдорфовой) размерности – двумерным фрактальным объектом.

Если равенство значений хаусдорфовой и топологической размерностей возможно для топологически двумерных математических объектов, то не исключено, что и среди топологически трёхмерных математических, а возможно, и физических объектов наукой будут обнаружены такие, у которых значение хаусдорфовой размерности равно топологической, то есть равно 3. Это согласуется с утверждением самого Мандельброта: «…D может быть целым числом (не большим, чем E…)» [2, с. 15]. Поскольку из топологически одномерных фракталов-кривых можно создавать трёхмерные математические фракталы, то с развитием физических гипотез, допускающих существование более трёх пространственных измерений (например, в теории струн и др.), не является невероятным предположение, что из топологически трёхмерных физических фракталов могут быть созданы или уже существуют в природе топологически n-мерные фрактальные объекты. Напомним в связи с этим, что ни фрактальная (метрическая) размерность, ни топологическая (геометрическая) размерность не отражают в полной мере природу исследуемого объекта, а являются способами рассмотрения объекта, эти способы будут уточняться в процессе усовершенствования аппарата математики и физики, все более приближаясь к описанию объекта таким, каков он есть.

Вернёмся к рассмотрению индикаторов фрактальности. Поскольку значение хаусдорфовой размерности не может быть меньше значения топологической размерности, то в случае, если значение хаусдорфовой размерности не превышает значения топологической размерности, значение хаусдорфовой размерности является целым числом, поскольку равно значению топологической размерности. Таким образом, в случае отсутствия индикатора «превышение» у фрактала отсутствуют сразу оба индикатора – и индикатор «превышение», и индикатор «дробность». Объясняется это тем, что (при таких исходных посылках) индикатор «дробность» является частным случаем индикатора «превышение».

Интересен тот факт, что существование фракталов с целочисленным значением хаусдорфовой размерности, которое равно значению топологической размерности, удовлетворяет неравенству Шпилрайна (в других вариантах написания – неравенство Спилрайна / неравенство Шпильрайна, англ. the Szpilrajn inequality) [29]. На это неравенство опирается сам Мандельброт, вводя дефиницию фрактала в своей монографии «Фрактальная геометрия природы» [2, с. 15]. Как поясняет Мандельброт, хаусдорфова размерность D может не быть целым числом, два измерения (топологическое и Хаусдорфа-Безиковича) могут не совпадать; они только удовлетворяют неравенству Шпилрайна: D ≥ DT [2, с. 15].

Как мы видим, неравенство Шпилрайна является нестрогим, то есть допускает как превышение хаусдорфовой размерностью топологической, так и равенство хаусдорфовой и топологической размерностей, а значит, как уже было сказано, допускает существование таких фракталов, как «дерево Пифагора».

Однако Мандельброт отступает от неравенства Шпилрайна и, как было показано ранее, в предлагаемой им дефиниции фрактала оставляет только знак превышения, исключая знак равенства, то есть выражает второй индикатор фрактальности не как нестрогое неравенство D ≥ DT, а как строгое неравенство D > DT (то есть как индикатор, называемый нами «превышение»).

В монографии «Фрактальная геометрия природы» Мандельброт аргументирует своё отступление от неравенства Шпилрайна тем, что «*почти* все множества в этом Эссе удовлетворяют D > DT (курсив мой. – Н.З.)» [2, с. 15], то есть тем, что значение хаусдорфовой размерности почти всех множеств, исследуемых им в данной монографии, превышает значение их топологической размерности. Однако можно предположить, что для отступления от неравенства Шпилрайна существовали и другие причины.

Во-первых, как уже было отмечено в предыдущих подразделах, на первом этапе развития фрактальной геометрии важной задачей для Мандельброта было нахождение точного индикатора для демаркации объектов и процессов на фракталы и нефракталы. Именно «строгое» превышение значением хаусдорфовой размерности значения топологической размерности подходило на роль такого индикатора-демаркатора, тогда как «нестрогое» превышение (то есть допускающее не только превышение значением хаусдорфовой размерности значения топологической размерности, но и равенство значений хаусдорфовой и топологической размерностей) «размывало» бы границу между фракталами и евклидовыми объектами.

Вторая возможная причина отступления от неравенства Шпилрайна заключается в том, что если бы Мандельброт не исключил знак равенства, то есть выразил бы индикатор фрактальности нестрогим неравенством (D ≥ DT), это бы вошло в частичное противоречие с придуманным им понятием «фрактал». Напомним, что топологическая размерность – это всегда целое число. Следовательно, в тех случаях, когда значение хаусдорфовой размерности равно значению топологической размерности, значение хаусдорфовой размерности является целочисленным, что, в свою очередь, означает, что понятие «фрактал», указывающее на дробность значения хаусдорфовой размерности, становится неуместным.

Итак, индикатор «превышение» является отступлением от неравенства Шпилрайна. На примере фрактала «Дерево Пифагора» показано, что существуют фракталы с целой хаусдорфовой размерностью, равной топологической (и наличие таких фракталов допускается неравенством Шпилрайна). Иными словами, у таких фракталов отсутствуют сразу оба индикатора фрактальности, связанные с хаусдорфовой размерностью, – индикатор «превышение» и индикатор «дробность». Из этого следует, что превышение значением хаусдорфовой размерности значения топологической размерности и дробность значения хаусдорфовой размерности не являются атрибутивными индикаторами фрактальности, отсутствие данных индикаторов («дробности» и «превышения») само по себе не является достаточным основанием для невключения объекта или процесса в класс фракталов.

4. Группы фракталов по критерию соотношения топологической и хаусдорфовой размерностей и наличие/отсутствие у данных групп индикаторов фрактальности, связанных с хаусдорфовой размерностью

Объекты и процессы, признанные в современной науке фракталами, по критерию соотношения значений их хаусдорфовой и топологической размерностей можно разделить на три группы. 1-я группа: фракталы, у которых значение хаусдорфовой размерности равно значению их топологической размерности, следовательно, является целым числом; 2-я группа: фракталы, у которых значение хаусдорфовой размерности превышает значение их топологической размерности меньше чем на единицу, следовательно, является дробным числом; 3-я группа: фракталы, у которых значение хаусдорфовой размерности превышает значение их топологической размерности на единицу, следовательно, является целым числом (отметим, что результаты недавних исследований свидетельствуют в пользу того, что значение хаусдорфовой размерности может превышать значение топологической размерности даже более чем на единицу [30]). Как видим, все фактически имеющиеся варианты соотношения значений хаусдорфовой и топологической размерностей фракталов удовлетворяют неравенству Шпилрайна, тогда как индикаторам «превышение» и «дробность» соответствуют не все варианты.

Итак, объекты и процессы, признанные в современной науке фракталами, по критерию соотношения значений их хаусдорфовой и топологической размерностей были разделены на три группы. Все три группы фракталов и лежащие в их основе варианты соотношения значений хаусдорфовой и топологической размерностей фракталов удовлетворяют неравенству Шпилрайна.

Рассмотрим теперь, что произошло бы с тремя вышеуказанными группами фракталов, выделенными на основе объектов и процессов, фактически причисляемых современной наукой к фракталам, если бы обоим рассмотренным нами индикаторам фрактальности, связанным с хаусдорфовой размерностью («дробность» и «превышение»), был придан статус атрибутивных. 1-я группа объектов исключалась бы из класса фракталов из-за отсутствия обоих индикаторов; 2-я группа объектов входила бы в класс фракталов, так как у неё наличествуют оба индикатора; 3-я группа объектов исключалась бы из класса фракталов из-за отсутствия индикатора «дробность». Таким образом, только вторая группа объектов входила бы в класс фракталов.

Если бы мы приняли в качестве атрибутивного индикатора фрактальности один индикатор – «дробность», являющийся частным случаем индикатора «превышение», то это максимально сузило бы класс фракталов, сохранив только вторую из трёх вышеуказанных групп.

Если бы мы приняли в качестве атрибутивного только индикатор «превышение», то это сузило бы класс фракталов в меньшей степени, допуская включение в него объектов второй и третьей групп.

Но ни тот, ни другой индикатор не позволяют включить в класс фракталов объекты первой группы. Данная проблема обозначена самим Бенуа Мандельбротом, который ещё в 1986 году писал, что предложенная им в 1977 году дефиниция (основанная на хаусдорфовой размерности) «…не включает многие “пограничные фракталы”… и всё ещё может быть улучшена» [31, с. 159] (эта дефиниция 1977 года приведена нами в начале подраздела 3.1).

Итак, если бы мы приписали индикаторам фрактальности, связанным с хаусдорфовой размерностью, статус атрибутивных (обязательных), то это привело бы к сужению класса тех объектов и процессов, которые могут быть причислены к фракталам.

Вышеуказанные результаты приводят нас к необходимости выбора одного из двух вариантов:

- либо признать, что многие объекты и процессы, причисляемые к фракталам, не являются таковыми из-за отсутствия индикаторов фрактальности, основанных на хаусдорфовой размерности (то есть индикаторов «дробность» и «превышение»);
- либо признать, что самого по себе отсутствия одного или обоих индикаторов фрактальности, основанных на хаусдорфовой размерности, недостаточно для невключения объекта или процесса в класс фракталов.

С нашей точки зрения, верным является второй вариант, поскольку, несмотря на отсутствие у объектов и процессов, относящихся к первой и третьей группам, одного или обоих индикаторов фрактальности, связанных с хаусдорфовой размерностью, эти объекты и процессы признаны фракталами благодаря наличию у них других характеристик, прежде всего, – фундаментального для фракталов свойства самоподобия.

Подведём итоги данного подраздела. Как было показано, индикаторы фрактальности, связанные с хаусдорфовой размерностью (индикаторы «дробность» и «превышение»), являются неатрибутивными (необязательными). Иными словами, наличия индикаторов фрактальности, основанных на хаусдорфовой размерности, недостаточно для определения того, является ли данный объект или процесс фракталом. Данный вывод подтверждается словами самого Мандельброта: «в общем, знания фрактальной размерности недостаточно» [2, с. 139].

Заключение

Подведём общие итоги данной работы, а также обозначим основную проблему в рассмотренной нами области и возможный путь её решения.

Основной результат данной работы, полученный при сопоставлении результатов исследования некоторых теоретических положений фрактальной геометрии и фактической ситуации в области исследования фракталов, состоит в выяснении того, что два рассмотренных индикатора фрактальности, связанных с хаусдорфовой размерностью («превышение» и «дробность»), не являются атрибутивными (обязательными); неатрибутивность данных индикаторов находится в согласии с неравенством Шпилрайна.

Итоги исследования некоторых теоретических положений фрактальной геометрии. В результате исследования этимологии основы изобретённого слова «фрактал» и дефиниций фрактала, основанных на хаусдорфовой размерности, были выделены два критерия и индикатора фрактальности. Первый критерий фрактальности, связанный с хаусдорфовой размерностью, – это значение хаусдорфовой размерности объекта или процесса. Соответствующий индикатор фрактальности, подразумеваемый в этимологическом значении основы слова «фрактал», – это дробное значение хаусдорфовой размерности объекта или процесса (кратко – индикатор «дробность»).

Второй критерий фрактальности – это соотношение значений хаусдорфовой и топологической размерностей объекта или процесса. Соответствующий индикатор фрактальности, представленный в дефинициях фрактала, основанных на хаусдорфовой размерности, – это строгое превышение значением хаусдорфовой размерности значения топологической размерности (кратко – индикатор «превышение»).

Итоги сопоставления фактически существующих фракталов с индикаторами фрактальности, связанными с хаусдорфовой размерностью.

Все объекты и процессы, признанные в современной науке фракталами, были разделены по критерию соотношения значений их хаусдорфовой и топологической размерностей на три группы:

1) фракталы с целым значением хаусдорфовой размерности, равным значению топологической размерности, следовательно, у них отсутствуют оба индикатора фрактальности – «дробность» и «превышение»;

2) фракталы с дробным значением хаусдорфовой размерности, превышающим значение топологической размерности меньше чем на единицу, следовательно, у них присутствуют оба индикатора фрактальности – «дробность» и «превышение»;

3) фракталы с целым значением хаусдорфовой размерности, превышающим значение топологической размерности на единицу, следовательно, у них отсутствует один индикатор фрактальности – «дробность».

Все три группы фракталов и лежащие в их основе варианты соотношения значений хаусдорфовой и топологической размерностей фракталов удовлетворяют неравенству Шпилрайна: ($D \geq DT$).

Придание индикатору «превышение» и в особенности индикатору «дробность» статуса атрибутивного индикатора является отступлением от неравенства Шпилрайна и неоправданно сужает класс фракталов: индикатор «превышение» допускает существование только второй и третьей групп фракталов; индикатор «дробность», являющийся частным случаем индикатора «превышение», допускает существование только второй группы фракталов.

Несмотря на отсутствие одного или обоих предложенных Мандельбротом индикаторов фрактальности, связанных с хаусдорфовой размерностью, некоторые объекты или процессы признаны научным сообществом фракталами на основе наличия у них другого индикатора – широко трактуемого самоподобия. Мандельброт неоднократно подчёркивал универсальность этой характеристики фракталов (см., например, [31, с. 158]).

На основании всего вышесказанного мы делаем вывод о том, что индикаторы «превышение» и «дробность» не являются атрибутивными индикаторами фрактальности и, на данный момент, более адекватно очертить объём класса фракталов позволяют такие индикаторы фрактальности, как наличие широко трактуемого самоподобия и удовлетворение неравенству Шпилрайна.

Основная проблема и путь её решения

Для того чтобы обозначить основную нерешённую проблему в исследуемой нами области и наметить путь её решения, напомним, что в данной работе было выделено три группы дефиниций фрактала: 1) определения, основанные на хаусдорфовой размерности; 2) дефиниции, основанные на самоподобии; 3) определения, упоминающие и первую характеристику, и вторую. Очевидно, что дефиниции третьей группы являются содержательно более полными. Обе величины – и размерность самоподобия, и хаусдорфова размерность – важны и выражают существенные характеристики фрактальных объектов и процессов. Однако, несмотря на это, до сих пор не найдена общая основа, объединяющая две эти ключевые характеристики фракталов.

Мы предполагаем, что поиск фундаментальной характеристики фракталов, которая связывает собой самоподобие и хаусдорфову размерность и (предположительно) обеспечивает корреляцию значений обеих величин – размерности самоподобия и хаусдорфовой размерности фрактала, является одним из наиболее важных и перспективных направлений в исследовании фракталов.

Если такая характеристика будет найдена, это будет свидетельствовать о достижении более глубокого понимания природы фракталов. Соответственно, дефиниция фрактала, основанная на этой фундаментальной характеристике, может стать универсальной основой для всех частных вариантов определений фрактала.

Список литературы

1. Barnsley M. F. Fractals Everywhere / Michael Fielding Barnsley; answer key by Hawley Rising III. – 2nd ed.; rev. with the assistance of Hawley Rising III. – Boston: Academic Press Professional, 1993. – 531 p. – ISBN 0–12–079069–6.
2. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature / Benoît B. Mandelbrot. – Updated and Augmented ed. – New York: W. H. Freeman and Company, 1983. – XII + 461 + XVI p. – ISBN 978–0–7167–1186–9.
3. Барышев Ю. Фрактальная структура вселенной: Очерк развития космологии / Юрий Барышев, Пекка Теерикорпи. – Нижний Архыз: САО РАН, 2005. – 410 с. – ISBN 5–98823–013–X.
4. Bassingthwaighte, J. B. Fractal Physiology / James B. Bassingthwaighte, Larry S. Liebovitch, Bruce J. West. – New York: Springer, 1994. – 384 p. – ISBN 978–1–4614–7572–9.
5. Liebovitch L. S. Introduction to Fractals [Электронный ресурс] / Larry S. Liebovitch, Lina A. Shehadeh // Tutorials in Contemporary Nonlinear Methods for the Behavioral Sciences / Eds. Michael A. Riley, Guy C. van Orden; National Science Foundation Program in Perception, Action, & Cognition, 2005. – pp. 178–266. – Режим доступа: https://www.nsf.gov/sbe/bcs/pac/nmbs/chap5.pdf.
6. Изотов А. Д. Фракталы: делимость вещества как степень свободы в материаловедении / А. Д. Изотов, Ф. И. Маврикиди. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2011. – 128 с.: ил. – ISBN 978–5–7883–0834–0.
7. Математическая энциклопедия: в 5 т. Т. 3: Коо – Од / Гл. ред. И. М. Виноградов. – М. : Советская энциклопедия, 1982. – 1184 с.: ил.
8. Яу Ш. Теория струн и скрытые измерения Вселенной / Шинтан Яу, Стив Надис ; [пер. с англ. А. Мороз, И. Рузмайкина, В. Семинько]. – СПб.: Питер, 2016. – 400 с.: ил. – ISBN 978–5–496–00247–9.
9. Потапов А. А. Фракталы и скейлинг в новых технологиях обработки информации и системном управлении / А. А. Потапов // Управление развитием крупномасштабных систем MLSD’2007: Тезисы докладов первой международной конференции (Москва, 1 – 3 окт. 2007 г.) / Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. – М.: Институт проблем управления РАН, 2007. – С. 184–186. – ISBN 978–5–91450–015–0.
10. Потапов А. А. Фрактальные методы исследования флуктуаций сигналов и динамических систем в пространстве дробной размерности / А. А. Потапов // Флуктуации и шумы в сложных системах живой и неживой природы / [В. С. Анищенко и др.] ; ред.: Р. М. Юльметьев и др. – Казань: [Школа], 2008. – С. 257–310. – 455 с. – ISBN 5–94712–015–1.
11. Потапов А. А. Фрактальный метод, фрактальная парадигма и метод дробных производных в естествознании / А. А. Потапов // Вестник Нижегородского университета имени

Н. И. Лобачевского. Серия «Математическое моделирование и оптимальное управление». –2012. – № 5 (2). – С. 172–180. – ISSN 1993–1778.
12. Kohavi Y. Topological Dimensions, Hausdorff Dimensions & Fractals [Электронный ресурс] / Yuval Kohavi, Hadar Davdovich. – May 2006. – 16 p. – Режим доступа: http://u.math.biu.ac.il/~megereli/final_topology.pdf.
13. Математическая энциклопедия: в 5 т. Т. 5: Слу – Я / Гл. ред. И. М. Виноградов. – М.: Советская энциклопедия, 1984. – 1248 с. : ил.
14. Kozlov G. V. Fractal Analysis of Structure and Properties of the Filled Polymer / G. V. Kozlov, V. U. Novikov, G. E. Zaikov // Homolytic and Heterolytic Reactions: Problems and Solutions / Eds. Gennady E. Zaikov, Yuri B. Monakov, Alfonso Jiménez. – New York: Nova Science Publishers, 2004. – pp. 17–90. – ISBN 978–1–59033–980–0.
15. Barcellos A. The Fractal Geometry of Mandelbrot / Anthony Barcellos // The College Mathematics Journal. – 1984. – Vol. 15, № 2. – pp. 98–114.
16. Aurell E. On the Metric Properties of the Feigenbaum Attractor / Erik Aurell // Journal of Statistical Physics. – 1987. – Vol. 47, Issue 3–4. – pp. 439–458.
17. Mandelbrot B. B. How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension / Benoît B. Mandelbrot // Science (New Series). – 1967. – Vol. 156, № 3775. – pp. 636–638.
18. Федер Е. Фракталы. Пер. с англ. Ю. А. Данилова, А. Шукурова. – М.: Мир, 1991. – 254 с.: ил. – ISBN 5–03–001712–7.
19. Grünberg F. Der Vater des Apfelmännchens [Электронный ресурс] / Frank Grünberg // Technology Review: Das Magazin für Innovation. – 2005. – № 1. – S. 64. Режим доступа: https://www.heise.de/tr/artikel/Der-Vater-des-Apfelmaennchens-404501.html.
20. Bez N. The Duality of Fractals : Roughness and Self-Similarity. Nicolas Bez, Sophie Bertrand // Theoretical Ecology. – 2011. – Vol. 4, Issue 3. – pp. 371–383.
21. Ayto J. Word Origins : The Hidden Histories of English Words from A to Z / John Ayto. – 2nd ed. – London: A&C Black, 2005. – 563 p. – ISBN 978–0–7136–7498–9.
22. Дворецкий И. Х. Латинско-русский словарь / И. Х. Дворецкий. – 2-е изд., переработ. и доп. – М.: Русский язык, 1976. – 1096 с.
23. Mandelbrot B. B. Fractal Dimension, Dispersion, and Singularities of Fluid Motion [Электронный ресурс] / Benoît B. Mandelbrot // Translated from: Comptes Rendus (Paris). – 282A, 1976. – pp. 119–120. – N19. – Режим доступа: http://users.math.yale.edu/~bbm3/web_pdfs/N_019.pdf.
24. Mandelbrot B. B. Les Objets Fractals : Forme, Hasard et Dimension. (French) [Fractal Objects: Form, Chance, and Dimension] / Benoît B. Mandelbrot. – 1e éd. – Paris: Flammarion, 1975. – 192 p. – ISBN 2–08–210647–0.
25. Mandelbrot B. B. Fractals: Form, Chance, and Dimension / Benoît B. Mandelbrot [revised edition; translated from the French]. – New York: W. H. Freeman and Company, 1977. – XVI + 365 p. ISBN 0–7167–0473–0.
26. Mandelbrot B. B. Fractal Aspects of the Iteration of $z \to \lambda z(1 - z)$ for Complex λ and z / Benoît B. Mandelbrot // Annals of the New York Academy of Sciences. – 1980. – Vol. 357, Nonlinear Dynamics. – pp. 249–259. – ISSN 0077–8923.
27. Bosman A. E. Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde. (Dutch) [The Wondrous Exploration Field of Plane Geometry] [Электронный ресурс] / Albert E. Bosman. – Breda: N.V. Uitgeversmaatschappij Parcival, 1957. – pp. 84–86. – Режим доступа: http://www.math.harvard.edu/~knill/teaching/mathe320_2016_fall/blog16/bosman_meetkunde.pdf.
28. Beck F. Generalized Pythagoras Trees: A Fractal Approach to Hierarchy Visualization / Fabian Beck et al. // Computer Vision, Imaging and Computer Graphics Theory and Applications. Revised Selected Papers / Eds. S. Battiato et al. [International Conference "Computer Vision, Imaging and Computer Graphics: Theory and Applications" (VISIGRAPP 2014), Lisbon, Portugal, January 5 – 8, 2014]. – 2014. – pp. 115–135. – (Series: Communications in Computer and Information Science, Vol. 550).
29. Hurewicz W. Dimension Theory / Witold Hurewicz, Henry Wallman. – Princeton: Princeton University Press; London: H. Milford, Oxford University Press, 1941. – VII + 165 p. – (Princeton mathematical series, 4).
30. Бугримов А. Л., Бычкова Д. А., Кузнецов В. С. Возможности вариации размерности фрактальных множеств / А. Л. Бугримов, Д. Д. Бычкова, В. С. Кузнецов // Вестник Московского

государственного областного университета. Серия «Физика – Математика». – 2014. – № 1. – С. 16–21. – ISSN 2072–8387.

31. Mandelbrot, B. B. Fractals and the Rebirth of Iteration Theory / Benoît B. Mandelbrot // The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems / Heinz-Otto Peitgen, Peter H. Richter. – Berlin; Heidelberg ; New York ; Tokyo : Springer-Verlag, 1986. – pp. 151–160. – XII + 199 p. – ISBN 3–540–15851–0.

Zudilina N.V. On the Non-Attributiveness of the Indicators of Fractality, Related to Hausdorff Dimension // Scientific Notes of V. I. Vernadsky Crimean Federal University. Philosophy. Political science. Culturology. – 2017. – Vol. 3 (69). – № 4. – P. 66–83.

Two indicators of fractality, related to Hausdorff dimension, are identified. The first indicator of fractality of objects and processes, implied in the etymological meaning of the stem of the word “fractal”, is the fractional value of the Hausdorff dimension of an object or process (hereinafter, the indicator “fractionality”). The second indicator, represented in the definitions of fractal based on Hausdorff dimension, is that the value of the Hausdorff dimension (D) strictly exceeds the value of the topological dimension (DT), or D > DT (hereinafter, the indicator “exceedance”).
Objects and processes, recognized in contemporary science as fractals, have been divided into three groups on the basis of the criterion of the relationship between the values of their Hausdorff and topological dimensions: 1) fractals with an integer value of Hausdorff dimension equal to the value of their topological dimension; hence, they do not have indicators “fractionality” and “exceedance”; 2) fractals with a fractional value of Hausdorff dimension exceeding the value of topological dimension by less than one, consequently, they have indicators “fractionality” and “exceedance”; 3) fractals with an integer value of Hausdorff dimension exceeding the value of their topological dimension by one, hence, they do not have indicator “fractionality”.
All three groups of fractals and their underlying variants of the relationship between the values of Hausdorff and topological dimensions satisfy the Szpilrajn inequality: (D ≥ DT). If we ascribe to the indicator “exceedance” and, in particular, to the indicator “fractionality” the status of the attributive (necessary) indicator, it means a deviation from the Szpilrajn inequality, and such a deviation unjustifiably narrows the class of fractals, since the indicator “exceedance” allows to consider as fractals only the objects of the second and third groups, and the indicator “fractionality” (which is a particular case of the indicator “exceedance”) allows to classify as fractals only the objects of the second group.
Despite the absence of one or both proposed by Mandelbrot indicators of fractality, related to Hausdorff dimension, some objects or processes are recognized by the scientific community as fractals because of the presence of another indicator of fractality – widely interpreted self-similarity. Thus, the indicators “exceedance” and “fractionality” are not attributive indicators of fractality. The search for a fundamental characteristic of fractals, the characteristic, which connects self-similarity and Hausdorff dimension, and, presumably, provides a correlation between both of values – the self-similarity dimension and the Hausdorff dimension of fractal, is one of the most important and promising directions in the study of fractals.

Keywords: fractal, Hausdorff dimension (Hausdorff-Besicovitch dimension), topological dimension, indicator of fractality, the Szpilrajn inequality, self-similarity (auto-similarity), Benoît Mandelbrot.

References

1. Barnsley M. F. Fractals Everywhere / Michael Fielding Barnsley; answer key by Hawley Rising III. – 2nd ed.; rev. with the assistance of Hawley Rising III. Boston, Academic Press Professional, 1993, 531 p. – ISBN 0–12–079069–6.
2. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. Updated and Augmented ed. New York, W. H. Freeman and Company, 1983, XII + 461 + XVI p. – ISBN 978–0–7167–1186–9.
3. Baryshev Yu. Fraktal'naja struktura vselennoj: Ocherk razvitija kosmologii [Fractal Structure of the Universe: Essay on the Development of Cosmology]. Nizhny Arkhyz, Special Astrophysical Observatory of the Russian Academy of Sciences, 2005, 410 p. – ISBN 5–98823–013–X.

4. Bassingthwaighte J. B. Fractal Physiology. Bassingthwaighte, Larry S. Liebovitch, Bruce J. West. New York, Springer, 1994, 384 p. – ISBN 978–1–4614–7572–9.
5. Liebovitch L. S. Introduction to Fractals [Online Resource] / Larry S. Liebovitch, Lina A. Shehadeh // Tutorials in Contemporary Nonlinear Methods for the Behavioral Sciences / Eds. Michael A. Riley, Guy C. van Orden; National Science Foundation Program in Perception, Action, & Cognition, 2005. pp. 178–266. – Available at: https://www.nsf.gov/sbe/bcs/pac/nmbs/chap5.pdf.
6. Izotov A. D. Fraktaly: delimost' veshhestva kak stepen' svobody v materialovedenii [Fractals: Divisibility of Matter as a Particular Degree of Freedom in Materials Science]. Samara, Samara State Aerospace University Press, 2011, 128 p.: ill. – ISBN 978–5–7883–0834–0
7. Matematicheskaja jenciklopedija [Encyclopaedia of Mathematics] In 5 Volumes. Vol. 3, Коо – Од / Ed.-in-Chief I. M. Vinogradov. Moscow, Sovetskaya entsiklopediya, 1982, 1184 p.: ill.
8. Yau Sh. Teorija strun i skrytye izmerenija Vselennoj [The Shape of Inner Space : String Theory and the Geometry of the Universe’s Hidden Dimensions] transl. from English A. Moroz, I. Ruzmaikina, V. Semin’ko. St. Petersburg, Piter, 2016, 400 p.: ill. – ISBN 978–5–496–00247–9
9. Potapov A. A. Fraktaly i skejling v novyh tehnologijah obrabotki informacii i sistemnom upravlenii [Fractals and Scaling in New Information Processing Technologies and System Management] Management of Large-scale System Development (MLSD’2007): Proceedings of the First International Conference (Moscow, October 01 – 03, 2007). V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences. Moscow, Institute for Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, 2007, pp. 184–186. – ISBN 978–5–91450–015–0
10. Potapov A. A. Fraktal'nye metody issledovanija fluktuacij signalov i dinamicheskih sistem v prostranstve drobnoj razmernosti [Fractal Methods for Studying Fluctuations of Signals and Dynamical Systems in Space of Fractional Dimension]. Fluctuations and Noises in Complex Systems of Living and Inanimate Nature. Kazan, Shkola, 2008, pp. 257–310. – ISBN 5–94712–015–1
11. Potapov A. A. Fraktal'nyj metod, fraktal'naja paradigma i metod drobnyh proizvodnyh v estestvoznanii [Fractal Method, Fractal Paradigm and Method of Fractional Derivatives in Modern Natural Sciences]. Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod. Series “Mathematical modelling and optimal control”, 2012, no. 5 (2), pp. 172–180. – ISSN 1993–1778
12. Kohavi Y. Topological Dimensions, Hausdorff Dimensions & Fractals [Online Resource]. May 2006, 16 p. Available at: http://u.math.biu.ac.il/~megereli/final_topology.pdf.
13. Matematicheskaja jenciklopedija [Encyclopaedia of Mathematics] In 5 Volumes. Vol. 5: Слу – Я . Ed.-in-Chief I. M. Vinogradov. Moscow, Sovetskaya entsiklopediya, 1984, 1248 p.: ill.
14. Kozlov G. V. Fractal Analysis of Structure and Properties of the Filled Polymer. Homolytic and Heterolytic Reactions: Problems and Solutions. Eds. Gennady E. Zaikov, Yuri B. Monakov, Alfonso Jiménez. New York, Nova Science Publishers, 2004, pp. 17–90. – ISBN 978–1–59033–980–0.
15. Barcellos A. The Fractal Geometry of Mandelbrot. The College Mathematics Journal, 1984, Vol. 15, no. 2, pp. 98–114.
16. Aurell E. On the Metric Properties of the Feigenbaum Attractor. Journal of Statistical Physics, 1987, Vol. 47, Issue 3–4, pp. 439–458.
17. Mandelbrot B. B. How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. Science (New Series), 1967, Vol. 156, № 3775, pp. 636–638.
18. Feder J. Fraktaly [Fractals] Transl. from English Yu. A. Danilov, A. Shukurov. Moscow, Mir, 1991, 254 p.: ill. – ISBN 5–03–001712–7
19. Grünberg F. Der Vater des Apfelmännchens [Online Resource]. Technology Review: Das Magazin für Innovation, 2005, no. 1, S. 64. Available at: https://www.heise.de/tr/artikel/Der-Vater-des-Apfelmaennchens-404501.html.
20. Bez N. The Duality of Fractals: Roughness and Self-Similarity. Theoretical Ecology, 2011, Vol. 4, Issue 3, pp. 371–383.
21. Ayto J. Word Origins: The Hidden Histories of English Words from A to Z. 2nd ed. London, A&C Black, 2005, 563 p. – ISBN 978–0–7136–7498–9.
22. Dvoretsky I. H. Latinsko-russkij slovar' [Latin-Russian Dictionary], 2nd ed., revised and enlarged. Moscow, Russkii yazyk, 1976, 1096 p.

23. Mandelbrot B. B. Fractal Dimension, Dispersion, and Singularities of Fluid Motion [Online Resource] Translated from Comptes Rendus (Paris), 282A, 1976, pp. 119–120, no.19. Available at: http://users.math.yale.edu/~bbm3/web_pdfs/N_019.pdf.
24. Mandelbrot B. B. Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension. (French) [Fractal Objects: Form, Chance, and Dimension]. 1e éd. Paris, Flammarion, 1975, 192 p. – ISBN 2–08–210647–0.
25. Mandelbrot B. B. Fractals: Form, Chance, and Dimension [revised edition; translated from the French]. New York, W. H. Freeman and Company, 1977. XVI + 365 p. ISBN 0–7167–0473–0.
26. Mandelbrot B. B. Fractal Aspects of the Iteration of $z \to \lambda z(1 - z)$ for Complex λ and z. Annals of the New York Academy of Sciences, 1980, Vol. 357, Nonlinear Dynamics, pp. 249–259. – ISSN 0077–8923.
27. Bosman A. E. Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde. (Dutch) [The Wondrous Exploration Field of Plane Geometry]. Breda, N.V. Uitgeversmaatschappij Parcival, 1957, P. 84–86. Available at: http://www.math.harvard.edu/~knill/teaching/mathe320_2016_fall/blog16/bosman_meetkunde.pdf.
28. Beck F. Generalized Pythagoras Trees : A Fractal Approach to Hierarchy Visualization. Computer Vision, Imaging and Computer Graphics Theory and Applications. Revised Selected Papers. Eds. S. Battiato et al. International Conference “Computer Vision, Imaging and Computer Graphics: Theory and Applications” (VISIGRAPP 2014), Lisbon, Portugal, January 5–8, 2014, pp. 115–135. Series: Communications in Computer and Information Science, Vol. 550
29. Hurewicz W. Dimension Theory. Princeton, Princeton University Press; London, H. Milford, Oxford University Press, 1941. VII + 165 p. Princeton mathematical series, 4.
30. Bugrimov, A. L. Vozmozhnosti variacii razmernosti fraktal'nyh mnozhestv [Possible Variations of the Dimension of Fractal Sets]. Bulletin of the Moscow State Regional University. Series “Physics and Mathematics”,2014, no. 1, pp. 16–21. – ISSN 2072–8387
31. Mandelbrot B. B. Fractals and the Rebirth of Iteration Theory. The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer-Verlag, 1986, P. 151–160. XII + 199 p. – ISBN 3–540–15851–0.