

*УДК 165.23*

## **АЛГЕБРО-ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ФОРМАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ**

*Титов А. В.*

*МГУ ПС (МИИТ), МГТУ им. Баумана, г. Москва, Российская Федерация*

*E-mail: a.v.titov@mail.ru*

В статье рассматривается проблема математического обеспечения ситуационного подхода к разработке систем поддержки принятия управленческих решений при управлении и прогнозировании развития сложных объектов. Приводится последовательность основных этапов принятия управленческого решения при ситуационном подходе, на основании анализа которой выделяются особенности формального описания объектов управления различной природы. Приводится типологизация языков описания ситуации управления и на основе анализа связей этих языков предлагается подход к установлению связи между типом языка описания и типом объекта управления. Показана обобщающая роль языка теории категорий.

**Ключевые слова:** ситуационный подход, оценка, сложность, формальный язык, модель, структура оценки, математическая структура, категория.

В условиях развивающегося кризиса мировой системы решение задач управления процессами, а также прогнозирования «хода» развития социума становится все более актуальной проблемой. Тем более, что, как показывает практика последнего времени, принимаемые решения зачастую приводят лишь к ухудшению и без того непростой ситуации.

Над решением этих задач работает целая армия ученых и управленцев, однако решения, даваемые моделями управления, все чаще приводят к неадекватным результатам, а прогнозы оказываются ошибочными.

Следует признать, что «классические» подходы не всегда дают желаемый результат, в частности, в областях, где важно не только наличие того или иного свойства у предмета исследования, но важно то, на сколько сильно проявляется данное свойство. Возникла потребность описывать такие объекты средствами математического моделирования, в которых предусмотрено использование многозначной логики. В результате необходимости моделирования объектов в условиях, когда информация о них не полна или противоречива, зародились такие новые средства моделирования, как эвристические методы, теория нечетких множеств, теория фракталов, теория экспертных оценок. Однако возникновение всех этих новых направлений не носило системного характера и часто их

построение не соответствовало по строгости требованиям, принятым в классической математике.

Как правило, к «сложным» объектам относят те, формальное описание которых невозможно, либо неприемлемо сложно. Как правило, их описание связано с необходимостью разработки формально-экспертных методов, которые позволяют осуществлять формализованное описание объектов при наличии факторов нечеткости и неопределенности.

Анализ основных идей и положений, характерных для класса проблем, в которых присутствуют элементы нечеткости и неопределенности, позволяет выявить следующие закономерности [1, с. 124; 2, с. 76]:

1. Исключительно велика роль субъекта при анализе таких проблем.
2. Информация о внешней среде, о связи между параметрами не бывает полной.
3. Принятие решений всегда сопряжено с риском.
4. Наиболее важная по своему характеру информация может быть получена только при помощи экспертов.
5. Принятие решений осуществляется человеком на основании опыта и интуиции, а также информации, полученной от других людей.
6. Существенные искажения собранной информации происходят обычно при попытках преобразования качественных понятий в числовые величины, поскольку каждый эксперт, как правило, имеет свои представления о соотношениях между качественными понятиями и количественными шкалами оценок.

При оценке состояний сложных объектов и процессов значительную роль приобретают семантические неколичественные оценки, выставляемые в качественных шкалах. Для «классического» оценивания такое положение дел нельзя считать обычным, поскольку точность оценок связывается с количественной оценкой.

Тем не менее, существует точка зрения, согласно которой количественная оценка не является единственно возможным видом оценки:

«Согласно всему здесь сказанному, следует признать поиски, как это часто случается, всех различий и всех определенностей предметного только в количественном одним из предрассудков, наиболее мешающих как раз развитию точного и основательного познания» [3, с. 92].

«Хотя сведение к числам тех явлений, в основании которых лежат определенные числа, и представляет большой научный интерес, все же никоим образом недопустимо рассматривать определенность мысли вообще как одну лишь числовую определенность» [3, с. 92].

В настоящее время представления о возможности и, более того, эффективности качественных оценок все чаще входят в обиход при оценке состояний сложных объектов в задачах управления и прогнозирования их развития.

Но, когда встает вопрос о моделировании сложных объектов или процессов управления этими объектами, возникает необходимость выбора способа представления результатов оценивания.

Анализ литературных источников позволяет провести следующую классификацию основных типов шкал, в которых может проводиться оценивание состояния исследуемых объектов [1, с. 96].

Таблица 1.  
Классификация основных типов шкал.

Измерения	Шкала	Изоморфность относительно преобразования
Качественные	Номинальная	Взаимно-однозначные преобразования
	Порядка	Строго-монотонные преобразования
	Гиперпорядка	Строго монотонные, сохраняющие порядок первых разностей
Количественные	Интервалов	$f(x) = ax + b.$
	Отношений	$f(x) = ax.$
	Разностей	$f(x) = x + b.$
	Абсолютная	$f(x) = x.$

Использование вербальных шкал для оценки связано с тем, что по ряду показателей оценка объекта не может быть проведена в числовом виде. В этом случае значения оцифровываются с помощью шкалы Харрингтона [1].

Таблица 2.  
Шкала Харрингтона

N/N п/п	Наименование градации шкалы	Численные значения
1	высокий уровень	0,80–1,00
2.	уровень выше среднего	0,64–0,80
3.	средний уровень	0,37–0,64
4.	уровень ниже среднего	0,20–0,37
5.	низкий уровень	0,00–0,20

Системность при решении широкого класса задач управления и прогнозирования развития объектов и систем реализуется, в частности, в ситуационном подходе, который, как отмечается в работах профессора Б. Г. Литвака, наиболее полно отражает проблемы, возникающие в управленческой деятельности, и включает основные методы, связанные с принятием управленческих решений, используемые при применении других подходов.

В рамках ситуационного подхода широкий класс задач управления (принятия управленческих решений) описывается моделью «ситуация-действие», в которой рекомендации по выработке управляющего воздействия определяются состоянием объекта управления (ситуацией управления) и целями управления, т. е. одним из

центральных звеньев технологии управления является звено оценки состояния объекта управления.

В реальной ситуации принятия управленческого решения вероятность нахождения ситуации управления в том или ином состоянии может быть не только неизвестна, но и сам вопрос о существовании этой вероятности может быть некорректным в связи, например, с ее уникальностью. В то же время сценарий развития ситуации зависит от того, в каком именно состоянии она находится на момент времени, принятый за начальный. В частности, если ситуация описывается аналитически уравнениями с переменными коэффициентами (параметрами), то различные диапазоны изменения коэффициентов могут приводить к различным решениям.

Проблемы, возникающие в задачах моделирования состояния сложных объектов и прогнозирования их развития, привели к формированию множества разрозненных методов моделирования.

Одним из направлений моделирования задач управления и прогнозирования развитием объектов и систем, является подход, основанный на использовании теории фракталов.

Для описания динамики состояний сложных объектов и перехода их в новые фазовые состояния полезными могут оказаться фрактальные модели в сочетании с нечеткими и эвристическими моделями. В частности, параметры модели развития:  $Z_{n+1} = K(t)Z_{pn} + C(t)$  могут иметь не только сложную структуру и нечеткий характер, но и обладать динамическими свойствами, как в «мягких» моделях В. И. Арнольда.

Одним из направлений, позволяющих обобщить методы моделирования задач управления и прогнозирования развития систем и процессов, является синтетическая квалиметрия, развиваемая в ленинградской школе квалиметрии под руководством А. И. Субетто.

В основе концепции синтетической квалиметрии, являющейся методологической базой для оценки качества сложных объектов различной природы, лежит системный подход к оценке качества объектов и процессов. В расширенной трактовке ее можно рассматривать как концепцию общей теории оценки состояний объектов и процессов произвольной сложности.

При решении научных, технических, экономических и других задач существенную роль играет подбор (построение) математической модели, на основе которой происходит машинное моделирование либо разработка информационных технологий специального применения. Подбору (разработке) модели предшествует подбор теории, в терминах которой определяются базовые структуры данных и операции в модели. В выбранной теории дается представление (описание) исследуемых понятий. Например, может считаться, что характеристики связаны непрерывной зависимостью.

Выписываются соотношения, связывающие характеристики элементов (например, в виде уравнений). Построение модели завершается, чтобы, как правило, начаться снова, т. е. быстро выясняется ее ограниченность.

Подбор формализации и знание границ применимости модели очень важны при математическом моделировании, т. к. неадекватность модели может привести к серьезным ошибкам в выводах. Здесь полезен логический анализ, позволяющий вскрыть корни недостатков и ограниченности формализации, выявить причины неадекватности применяемых средств моделирования.

При управлении развитием сложных объектов в общем случае решаются следующие задачи:

- получение и анализ информации о возможных состояниях объекта управления;
- выделение семейства свойств объекта управления, определяющих его состояние и влияющих на принятие управленческого решения;
- преобразование семейства свойств объекта управления в систему параметров (показателей и критериев) оценки состояния объекта управления;
- описание “иерархии” параметров объекта управления;
- формирование системы мер, в которых оцениваются значения показателей и критериев оценки состояния объекта управления;
- шкалирование системы мер введением на ней системы отношений;
- разработка методов и процедур формирования массивов эталонных состояний объекта управления;
- установление метрик и определение мер сходства на пространстве признаков состояния объекта управления (показателей и критериев), по которым будет определяться близость состояния объекта управления к эталонным состояниям;
- разработка методов и процедур формирования массивов управленческих решений;
- формализация процесса сопоставления управленческих решений эталонным состояниям объекта управления, т. е. представление его в виде оператора определенного типа;
- формирование формализованного описания технологии принятия управленческого решения на основе оценки состояния объекта управления;
- повтор всей цепи процедур, если это необходимо.

При решении перечисленных задач важно учитывать, что в зависимости от сложности и природы объекта управления в описании элементов модели оценки может использоваться различный формальный аппарат, т. е. различные формы описания состояний объекта управления и методов оценки этих состояний. Классификация форм описания и используемых при этом формальных языков разрабатывалась А. И. Субетто в рамках синтетической квалиметрии, которая включает как составные части общую и специальные квалиметрии. Специальные квалиметрии развиваются как раскрытие общей квалиметрии относительно методов и формальных моделей оценки. При этом, как показано в работах А. И. Субетто, разные виды специальных квалиметрий находятся в органической связи друг с другом и образуют единое целое в рамках синтетической квалиметрии [5, с. 68].

Таким образом, в синтетической квалиметрии реализуется идея о взаимоопределяющей связи целого, выраженная в диалектике Гегеля: «Когда предполагается некое определенное содержание, какое-то определенное наличное бытие, то это наличное бытие, потому, что оно определенное, находится в

многообразном соотношении с другим содержанием. Для него не безразлично, имеется ли другое содержание, с которым оно соотносится, или его нет, ибо только через такое соотношение оно по своему существу есть то, что оно есть. То же имеет место и в представлении..., в связи с которым небезразлично, имеется ли бытие или отсутствие содержания, которое как определенное представляется соотнесенным с другим содержанием» [6, с. 94].

Важный вывод для организации управления заключается в следующем. Пока целое (данное качество) устойчиво, входящим в него определенностям, с одной стороны, чтобы измениться, необходимо преодолеть «сопротивление» целого. С другой же стороны, целым будут отторгаться определенности, не находящиеся в указанном соотношении необходимости с другими определенностями. Наконец, определенности, меняясь, меняют и целое.

В работе [7, с. 123] раскрывается взаимосвязь между различными типами специальных квалиметрий, описываются некоторые характеристики ситуаций, в которых проводится оценка качества и рекомендуемые для них типы формального описания в рамках специальных квалиметрий.

Надежды на дальнейшее обобщение методов формализации задач управления связаны с использованием языка теории категорий.

Категорный подход основан на том, что нечеткое множество связывается с некоторым топосом (т. е. категорией, обладающей конечными пределом и копределом, классификатором подобъектов и допускающей экспоненцирование), что позволяет для таких множеств определить теоретико-множественные конструкции.

Пусть  $P$  – произвольное линейно-упорядоченное множество с начальным элементом 0 и конечным элементом 1.  $P$  является решеткой и есть алгебра Гейтинга.

Операция  $\rightarrow$  задается здесь по правилу:

$$p \rightarrow q = \begin{cases} 1 & \text{при } p < q \\ q & \text{при } p > q \end{cases}$$

Проверяется, удовлетворяет ли операция  $p \rightarrow q$  условиям, налагаемым на псевдодополнение. Это применимо, в частности, к отрезку  $[0,1]$  с «естественным» упорядочением.

Приведенное замечание позволяет сделать вывод о применимости алгебры Гейтинга к операциям на нечетких множествах.

Нечеткое множество может быть определено через описанное выше отношение равенства, которое удобно иллюстрируется на топосе  $\mathbf{Bn}(I)$  расслоений над индексным множеством  $I$ . Если заданы стрелки  $f, g$  на классе морфизмов  $I \rightarrow A$  (где  $A$  – пространство расслоения), то, как было показано в [10, с. 175].

$$[f \approx g] = \{ i \text{ из } I: f(i) = g(i) \},$$

тогда

$$[f \approx f] = \{ i \in I: f(i) = f(i) \},$$

и принадлежность можно рассматривать как отношение

$$\frac{[f \approx f]}{I},$$

которому в работе соответствует выражение

$$\eta = \frac{n^{(1)}}{m},$$

описывающее относительный коэффициент принадлежность признаков качеству. Здесь  $n^{(1)}$  множество признаков, присутствующих у исследуемого качества [4, с.125].

Развитие подхода позволяет интерпретировать алгебру нечетких множеств как полную алгебру Гейтинга в категории Q-Set.

Теоретико-категорный язык позволяет расширить описанный подход на случай алгебры оценок с дополнительной структурой и связан с условием сохранения дополнительной структуры на ней. [8, с. 98].

Применительно к задачам, решаемым в синтетической квалиметрии, это означает моделирование задачи комплексной оценки состояния объектов и процессов функторами, сохраняющими структуру из категории состояний объектов оценки в категорию оценок.

В частности, такой подход реализуется в нестандартном анализе, которой «есть алгебро-логический метод, основанный на рассмотрении оценок и в основном применяемый для изучения объектов, представимых в виде глобальных элементов некоторого пучка» [9, с. 377].

В работе [10, с. 76] уже рассматривался категорный подход к описанию задач квалиметрии, и было показано, что язык теории категорий, в частности, использование понятия подобъекта и классификатора подобъектов позволяет сформировать базис для фундаментального обоснования теории нечетких множеств и тем самым ввести качественные характеристики объектов оценки в область формального описания.

При категорном подходе «логики», к которым относятся и «логики оценки», как вид исследования структур представляют собой семейство функторов из категорий, соответствующих формальным теориям в категории структур, на которых принимает значение оценка. Иными словами, в категорном подходе *оценка есть функтор, сохраняющий дополнительную структуру*. При таком подходе вид минимальной логики «образующей» будет определяться типом функтора и, следовательно, минимальные логики будут представлять собой семейство, определяемое семейством баз, предбаз, образующих и т. д. структур значений оценки. Нельзя исключать и того, что сюда войдут функторы как гладкие отображения многообразий, поскольку в обиход уже введен термин «локальная истинность», в частности, в [11] рассматривается язык PL, в который включена

новая связка  $\nabla$  и если  $\alpha$  – формула этого языка, то формула  $\nabla\alpha$  читается «локально имеет место, что  $\alpha$ ».

В категории  $\mathbf{K}$  подобъекты определяются как семейство вида  $\text{Sub}(d) = \{[f] \mid f \text{ стрелка и } \text{cod}(f)=d\}$ . Классификатором подобъектов называют  $\mathbf{K}$ -объект  $\Omega$  вместе со стрелкой  $\text{true}: 1 \rightarrow \Omega$ , для которой диаграмма 1 – декартов квадрат

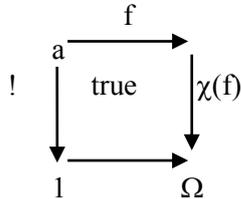


Диаграмма 1.

Для  $\Omega$  также можно рассматривать семейство  $\text{Sub } \Omega$ . Рассматривая  $\Omega$  как структуру, на которой принимает значение оценки, получаем инструмент для семантического анализа типа логического исчисления.

Введение в теории категорий классификатора подобъектов  $\Omega$ , и связанная с этим понятием  $\Omega$  – аксиома, порождает утверждение, о том, что в категории, обладающей классификатором подобъектов  $\text{Sub}(d) \cong \mathbf{K}(d, \Omega)$ . В частности, в качестве  $\mathbf{K}$  можно взять категорию, соответствующую формальной теории (в частности алгебру формул логического исчисления), в качестве  $\Omega$  – структуру, на которой принимает значение оценка. В [11, с. 170] доказано, что утверждение о том, что топос  $\mathbf{K}$  булев, эквивалентно утверждению о том, что  $\text{Sub } \Omega$  – булева алгебра. Этим определяются и ограничения на свойства функции  $\chi(f): d \rightarrow \Omega$  – она должна сохранять структуру. В частности, подтверждается предположение о том, что структура оценки для булевой алгебры формул должна быть булевой алгеброй, что не всегда учитывается в многозначных логиках.

**Вывод.** В настоящее время моделирование процессов управления сложными объектами и процессов, и прогнозирования их развития сталкивается со следующими трудностями. Признанные классическими методы формального моделирования в условиях наличия факторов нечеткости и неопределенности, неполноты информации об основных факторах, влияющих на динамику развития объекта исследования, динамично изменяющейся внешней среды, зачастую не достаточно эффективны. Методы формального моделирования таких объектов и процессов не систематизированы, их применение не базируется на единой методологии, что снижает эффективность их применения. Поиск новых подходов требует, прежде всего, тщательного анализа причин, возникающих при моделировании состояний таких объектов. Недостаточно констатации факта низкой эффективности того или иного метода формального моделирования. Практика моделирования состояний сложных объектов в настоящее время часто нацелено на применение качественных, а не количественных оценок. Технически это осуществляется методами теории нечетких множеств, использующей лингвистические переменные, значения которых носят качественный характер.

Однако эта техника не имеет достаточно надежной базы. Разработка такой базы могла бы осуществляться на основе синтеза концепций синтетической квалиметрии, системного подхода и использования новых математических методов, связанных с использованием и разработкой неклассических вариантов формальной логики и теории категорий.

### Список литературы

1. Литвак Б. Г. Экспертные оценки и принятие решений / Б. Г. Литвак. – М.: Патент, 1996. – 271 с.
2. Мельников А. Н. Бронштейн Л. С. Коровин С. Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой / А. Н. Мельников, Л. С. Бронштейн, С. Я. Коровин. – М.: Наука, 1990. – 271 [1] с.
3. Гегель Г. В. Ф. Энциклопедия философских наук. Т.1. Наука логики. – М.: Мысль, 1974. – 452 с.
4. Субетто А. И. Метаклассификация как наука о механизмах и закономерностях классифицирования / А. И. Субетто. – СПб. – Москва.: Исслед. центр пробл. качества подгот. специалистов, 1994. – 254 с.
5. Субетто А. И. Введение в квалиметрию высшей школы: [В 4 кн.] Кн. 3: Общая квалиметрия и специальные методы квалиметрии / А. И. Субетто. – М.: ИЦ Гособразования СССР, 1991. – 171 с.
6. Гегель Г. В. Ф. Наука логики. – СПб.: Наука, 1997. – 799 с.
7. Субетто А. И. Титов А.В. Ситуационный подход к применению методов специальных квалиметрий в системах мониторинга качества образования на различных уровнях // Труды восьмого симпозиума «Квалиметрия человека и образования». – М.: Исслед. центр пробл. кач-ва подгот. спец., 1999. – 61 с.
8. Титов А. В. О зависимости типа логического исчисления от структуры оценки // Материалы международной конференции «Седьмые Смирновские чтения по логике» – М.: МГУ им. Ломоносова, 2011. – С. 34–36.
9. Любецкий В. А. Некоторые применения теории топосов к изучению алгебраических систем // П. Т. Джонсон. Теория топосов. – М.: Наука, 1986. – С. 376–430
10. Субетто А. И. Титов А. В. Категорный подход к описанию задач квалиметрии // Труды седьмого симпозиума «Квалиметрия человека и образования: методология и практика». – М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 1998. – 67 с.
11. Гольдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики / Р. Гольдблатт. – М.: «Мир», 1983. – 438 с.

**Titov A. V. The Algebraic-logical Methods in the Formalizing the Tasks of Management and Predicting the Development of Complex Systems // Scientific Notes of V. I. Vernadsky Crimean Federal University. Philosophy. Political science. Culturology. – 2016. – Vol. 2 (68). – № 3. – P. 160–169.**

Classical approaches to modeling control tasks do not give the desired result. In particular, in the modeling complex objects and processes there is a need in mathematical modeling with using multi-valued logic.

The need of modeling objects in conditions when information about them is incomplete or contradictory, have arisen such new modeling tools like heuristics, fuzzy set theory, fractal theory, theory of expert estimates.

However, the emergence of all these new directions was not of a systemic nature and often their construction did not correspond to severity to the requirements accepted in classical mathematics.

The problem of mathematical software of situational approach to development of systems of support of a decision making for management and forecasting of development of the composite systems is considered. The sequence of the main stages of adopting the decision is given. On the basis of the analysis of these stages features of the formal description of objects of management of various nature are investigated. The main types of languages are given. Communication between type of language of the description and type of an object of management is described.

**Keywords:** situational approach, evaluation, complexity, formal language, model, structure of evaluation, mathematical structure, category.

### References

1. Litvak B. G. Jekspertnye ocenki i prinjatje reshenij [Expert Assessment and Decision-Making]. Moscow, Patent, 1996, 271 p.
2. Melnikov A. N. Bronshtejn L. S. Korovin S. Ja. Situacionnye sovetujushhie sistemy s nechetkoj logikoj [The Case of the Soviet System with Fuzzy Logikoy]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 272 p.
3. Gegel' G. V. F. Jenciklopedija filosofskih nauk [Encyclopedia of Philosophical Sciences]. Vol. 1. The Science of Logic. Moscow, Mysl Publ., 1974, 452 p.
4. Subetto A. I. Metaklassifikacija kak nauka o mehanizmah i zakonomernostjah klassificirovanija [Metaclassification as the Science of the Mechanisms and Laws of Classification]. St. Petersburg – Moscow, Research training center, 1994, 254 p.
5. Subetto A. I. Vvedenie v kvalimetriju vysshej shkoly (V 4 kn). Kn. 3. Obshhaja kvalimetrija i special'nye metody kvalimetrii [Introduction of Quality Control of Higher Education. Book III. General and special qualimetry]. Moscow, Research training center, 1991, 171 p.
6. Gegel' G. V. F. Nauka logiki [The Science of Logic]. St.Petersburg, Nauka Publ., 1997, 799 p.
7. Subetto A. I. Titov A. V. Situacionnyj podhod k primeneniju metodov special'nyh kvalimetric v sistemah monitoringa kachestva obrazovanija na razlichnyh urovnjah [Situational Approach to the Use of Special Methods of Quality Control in Monitoring the Quality of Education Systems at Various Levels. Proceedings of the eighth symposium "Qualimetry man and obrazovaniya]. Moscow, Research training center, 1999, 178 p.
8. Titov A. V. O zavisimosti tipa logicheskogo ischislenija ot struktury ocenki [On the Dependence of the Type of Logical Calculus of the Evaluation Framework]. Proceedings of the international conference "Smirnov's Readings Seventh logically". Moscow, Moscow State University, 2011, P. 34–36.
9. Ljubeckij V. A. Nekotorye primenenija teorii toposov k izucheniju algebraicheskij system [Some Applications of Topos Theory to the Study of Algebraic Systems]. P.T. Johnson. Topos theory. Moscow, Nauka Publ., 1986, P. 376–430
10. Subetto A. I. Titov A. V. Kategornyj podhod k opisaniju zadach kvalimetrii [The Categorical Approach to the Description of Quality Control Problems]. Proceedings of Seventh Symposium "Qualimetry Rights and Education: Methodology and Practice". Moscow, Research Center problem the quality of training, 1998, 67.
11. Gol'dblatt R. Toposy. Kategornyj analiz logiki. [Topoi. The Categorical Analysis of Logic]. Moscow, Mir, 1983, 468 p.