Ученые записки Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского
Философия. Политология. Культурология. Том 2 (68). 2016. № 4. С.143–154.

УДК 165.23

ББК 87.4

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕФИНИТНЫХ МЕТОДОВ В СЕМАНТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ТИПОВ ФОРМАЛЬНЫХ ЛОГИКИ

Титов А. В.

МГУ ПС (МИИТ), МГТУ им. Баумана, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: a.v.titov@mail.ru

Рассматривается подход к изучению типов логических исчислений, основанный на использовании нефинитных методов, позволяющих рассматривать множество формул алгебры логики с введенным на нем отношением эквивалентности как фактор-алгебру с определенной структурой. К ее исследованию могут быть привлечены методы теории структур, или в более общей постановке методы теории категорий, что является развитием семантического подхода к исследованию типов формальной логики на основе исследования оценки.

Использование такого подхода обосновано тем, что в метаматематике как теории, изучающей формализованные математические теории, используется аппарат различных разделов математики и она, тем самым, сама становится объектом математического исследования.

Рассматривается взаимосвязь различных типов логического исчисления на основе исследования оценки как морфизма, сохраняющего структуру из алгебры формул в структуру значений оценки. Анализируется связь этого подхода с тезисом о внутреннем саморазвитии понятия выдвинутым Гегелем в «Науке логики» и его применимость к развитию математики и математической логики, т. е. рассматривается вопрос о внутреннем развитии математики. Приводятся примеры, позволяющие показать, что в развитии математики стихийно этот принцип действует в форме диалектики внешней рефлексии. В пользу тезиса о саморазвитии выступает и тот факт, что использование нефинитных методов делает более ясным смысл многих метаматематических теорем.

Ключевые слова: диалектика, оценка, математическая структура, мера, семантика, решетка, импликативная решетка, отношение эквивалентности, логическое исчисление.

Объектом исследования является формальная логика в ее классической и неклассических формах. **Целью работы** является поиск методологии, позволяющей с общей позиции рассмотреть соотношение между различными видами логики и проследить динамику их развития как диалектический процесс.

Подход на основе исследования оценки позволяет рассмотреть различные типы логического исчисления в их единстве, а их развитие как диалектический процесс, в котором возникновение новых вариантов логического исчисления рассматривается как результат «снятия» старого путем «перехода» к более общему типу алгебраических структур, элементы которых служат значениями оценок формул логического исчисления. В основе этого «снятия» лежит антитеза идеи и явления или, как это определил А. Ф. Лосев, чистой математики и математического естествознания.

При этом в центре внимания оказывается отношение между формой логического исчисления и структурой оценки, а также отношение эквивалентности, определяющее меру на структуре оценки.

Современная математика развивается как результат «взаимодействия» двух процессов: процесса ***абстрагирования***, в котором выделяются некоторые общие черты различных сущностей и результатом которого становится аксиоматическое представление абстрактных структур, и процесса ***специализации*** – поиска новых моделей для имеющихся систем аксиом. Фактически развитие математики происходит как процесс познания так описанный А. Ф. Лосевым: «…в целях уразумения действительности мы разделяем ее на отдельные более или менее абстрактные моменты и изучаем их изолированно…», однако, «Разумеется, полная действительность вещи не та, которая свойственна ей в ее абстрактно-изолированном состоянии, но та, которая принадлежи ей в ее всестороннем взаимоотношении со всем прочим» [1, с. 23]. Это можно в полной мере отнести к математике и математической логике. Более того, хотя математика и относится к циклу формальных наук, в которых не действуют принципы спекулятивной философии, однако уже Гегель заметил, что: «Математика обязана своими самыми блестящими успехами тому, что она приняла то определение, которого не признает рассудок» [2, с. 89].

Современная математика по природе своей вступает в конфликт с методами познания, принятыми в естествознании. Ее объекты и правила вывода порождены сознанием, а не внешним опытом. Другое дело, что внешний опыт часто доминирует над сознанием человека, навязывая ему те или иные определения и представления, над истинностью которых человек часто не задумывается. Однако сознание не может не стремиться выйти за пределы опыта, что и составляет суть абстракции, при этом такой «выход» может осуществляться далеко за пределы опыта. Это диалектический шаг, результат антитезы чистой математики и математики естествознания. В частности, новое понимание формальной логики, расширяющее ее понимание как анализа типов рассуждений, отмечается в работе Гольдблатта: «Аналогично те исследования структуры, которые относятся к так называемым “логикам”, уже вышли за пределы своих исходных основ (анализа принципов рассуждений)» [3. с. 11].

В «Диалектических основах математики» А. Ф. Лосев утверждает, что при рассмотрении числа как объективно-социальной действительности со всеми ее логическими скрепами «мы бы получили число (а значит, и математику) не как предметный продукт мышления и не как физический продукт природы, но как продукт саморефлексии духа, как факт духовной культуры» [1, с. 27].

Это означает, что чистая математика как понятие, являясь продуктом саморефлексии духа, сама в процессе саморазвития составляет свой конечный продукт, т. е. понятие математики составляет конечный результат развития математики. Кроме того, такая саморефлексия включает не только предмет, но и метод исследования, что выражается в том, что математика и метаматематика используют один и тот же язык.

Предмет же математики следует определить, т. к. рассматривать ее как науку о числах в привычном понимании этого слова уже нельзя, в частности, объектом математического знания стали структуры. И такие структурные свойства числа, по мнению А. Ф. Лосева, раскрываются в развитии триады: интенсивное число – экстенсивное число – эйдетическое число (ἀριθμοί είδητικοί), причем первые два элемента этой триады составляют диалектическую противоположность, – третий же разрешение этой противоположности как их диалектический синтез.

Этот подход предполагает, что математическая логика не составляет голую форму математического знания, не абстрагируется от него, но сами логические формы лежат в основе математических структур – «материи математики». В своих работах фон Нейман предложил вариант построения натурального ряда как теоретико-множественной конструкции, начинающейся с пустого множества. Это построение может быть воспринято как «отражение» гегелевско-лосевского положения о том, что математика, как и логика, должна развиваться из простого начала, – полярности, которая определяется как «форма различия, которое в то же время сохраняется в тождестве как нечто нераздельное» [2, с. 23]. В математике, возможно, роль такого полярного начала (бытие-ничто) могут играть пустое множество и его дополнение, которое, в случае, когда имеем только пустое множество, есть снова пустое множество. Т. е. $\varnothing = \neg\varnothing$.

В «схеме» фон Неймана натуральные числа обладают такой базированностью: $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\ldots$, т. е. натуральный ряд возникает из бесконечного соотношения с собой пустого множества, при этом натуральные числа являются теми формами конечного и изменяющегося нечто, которые и участвуют в этом бесконечном соотношении.

Математик не осознает получаемый им результат как результат саморазвития и саморефлексии духа, но именно спонтанное достижение ее и позволяет получать результаты обеспечивающие развитие самой математики.

Использование одного языка в исследовании как предмета математики (математики как понятия) так и метода ее исследования выражается в том, что множество формул формализованной теории является алгеброй, в общем случае с бесконечными операциями. После введения отношения эквивалентности на множестве формул, фактор-алгебра становится структурой, законами которой определяется тип логики, принимаемой в теории. Отсюда естественность применения в математической логике методов теории структур.

В частности, примером алгебраизации логических исчислений может служить тот факт, что доказана эквивалентность теоремы о полноте пропозиционального исчисления и теоремы Стоуна о представлении булевых алгебр.

Применение нефинитных методов, использующих современные математические теории, позволяет выявить математическую структуру формальной логики и проследить взаимосвязь различных видов логических исчислений, другими словами выявить ее математическое содержание.

Рассмотрение множества формул или множества классов эквивалентности формул как универсальных алгебр, предложено Линденбаумом и Тарским. Это позволило установить связь между классической теорией (логикой) и теорией булевых алгебр. Аналогичная связь для неклассических теорий между интуиционистской логикой и импликативными решетками установлена в работах Стоуна, Тарского, Мак-Кинси [4, с. 10].

Обобщением метода истинностных таблиц является метод интерпретации формул как отображений в решетках (оценок), что нашло развитие в работах Мостовского и в дальнейшем – в работах Сикорского и Расевой, получивших алгебро-топологическое доказательство теоремы Геделя о полноте [4, с. 101].

В настоящее время применение неклассических логик в математике ограничено, однако постоянно растущие и изменяющиеся требования к применяемому в формальных моделях сложных объектов и процессов математическому аппарату, могут существенно изменить это положение и привести к развитию математических теорий, основанных на использовании различных видов неклассической логики.

Если в формализованной теории операции заменяют шаги дедукции, то вполне естественно представить такую систему как категорию. С другой стороны, от вывода в исчислении требуется сохранение истинности или, в случае многозначности значений истинности, преобразование истинности по известному закону. Но это означает, что вывод или шаги дедукции связаны с сохранением или изменением по известному закону оценки, которая также может быть представлена как морфизм определенной категории.

Если рассматривать модели как функторы, сохраняющие дополнительную структуру из категории, соответствующей данной теории, в категорию множеств, то выбор вместо категории множеств, других категорий дает возможность изучать и строить неклассические теории. Тогда категория, на которой принимает значение функтор, определяет тип логики для исследуемой модели.

Ценным для нашего исследования является то обстоятельство, что в теории категорий свойства объекта определяются не через его внутреннюю структуру, а через его связи с другими элементами, которые выражаются через функции (стрелки).

Расширения, даваемые теорией категорий, распространяются и на логику. Классическая логика представлена в категории set двузначной булевой алгеброй. Каждый топос имеет аналог этой алгебры, а значит, определяет некоторое логическое исчисление, которое, впрочем, может отличаться от классической логики, поскольку логические принципы в топосе есть принципы интуиционистской логики [3. с. 13].

С философской точки зрения категорный подход к логике интересен тем, что расширяет ее возможности, при этом позволяет проследить связь между классическими и неклассическими вариантами логических исчислений.

Как вариант категорного подхода к анализу логических исчисления может рассматриваться и обобщенный нестандартный анализ, который в работе В. А. Любецкого определяется как «алгебро-логический метод, основанный на рассмотрении оценок и в основном применяемый для изучения объектов, представимых в виде глобальных элементов некоторого пучка» [5, с. 377].

При этом подходе различные типы логики определяется структурой, на которой принимает значение оценка.

РАЗДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ОЦЕНКИ, «СЕМАНТИЧЕСКАЯ» ОЦЕНКА.

Непосредственное представление об истинности сводится к тому, что, суждение «А есть В» считается истинным лишь тогда, когда это суждение выполняется для всех элементов из А, т. е. случае, когда в качестве значений оценки рассматривается система подмножеств Р(А) некоторого множества А. При этом принимается возможным существование только двух мер истинности – 0 и 1, причем только само А имеет меру 1. Кроме того, если А есть бесконечное множество, то и разность A/N, где N – любое конечное множество, при таком задании меры имеет меру ноль. Более того, $\forall C \subset A$ имеем $|C| = 0$, и лишь $|A| = 1$. Если же $C \subset D$ и при этом $D \neq A$, то также , $|D| = 0$ хотя D и содержит «больше», чем С, элементов со свойством В, но это можно трактовать как то, что при переходе от С к D истинность меняется на бесконечно малую величину.

Итак, непосредственное представление об истинности приводит к тому, что перенос этого отношения на случай, когда в качестве значений оценки рассматривается система подмножеств Р(Х) некоторого множества Х. Принимается возможным существование только двух мер истинности 0 и 1, причем только Х имеет меру 1. Выход за пределы такого задания меры носит естественный характер. Одним из способов задания меры истинности, при котором исключается описанный случай, является способ задания меры на системе подмножеств, принятый в нестандартном анализе. При этом сохраняется как структура значений меры истинности, так и система законов классического исчисления. Мерой 1 обладают лишь те подмножества, которые принадлежат некоторому нетривиальному ультрафильтру. Тогда все дополнения к элементам ультрафильтра, в семейство которых входят все конечные множества имеют меру 0.

Следующий шаг в отрицании такого определения меры может заключаться в необходимости признания ее многозначности, как это происходит, например, в случае вероятностной меры, что дает вероятностный вариант логического исчисления. Наконец, отрицанию может подвергнуться сам факт того, что любое подмножество может обладать мерой истинности, но только подмножества, принадлежащие некоторой структуре, например, топологии.

В частности, такой семантический подход дает простой пример формальной логики без закона двойного отрицания.

Рассмотрим пример того, как особенности структуры значений оценки влияют на общезначимость формулы $\neg\neg A = A$. Как известно, для интерпретации законов интуиционистской логики Тарский предложил рассматривать оценки, значением которых являются открытые множества топологического пространства.

Рассмотрим плоскость, разделенную осью Х. Пусть А – множество точек «верхней» половины плоскости, тогда если нет никакой дополнительной структуры и рассматривается только совокупность точек плоскости, то $\neg$A – отрицание A содержит все точки плоскости, находящиеся вне A, т. е. точки оси X и «нижней» полуплоскости. Теперь снимаем это отрицание, т. е. снимается включение всех точек X и полуплоскости. Следовательно, возвращаемся снова в A. Снятие здесь формально возвращает нас к первоначальному состоянию.

Дополним плоскость структурой топологии. Выберем в качестве A полуплоскость вместе с осью X. Отрицание $\neg A$ есть оставшаяся полуплоскость как открытое множество. Отрицание отрицания $\neg\neg A$ в этом случае, однако есть уже не прежнее множество, т. к. оно не открыто в топологии, но оставшаяся полуплоскость без оси X, т. е. $\neg\neg A \subset A$ и отрицание отрицания отлично от исходного множества, включено в него. В данном случае снятие отрицания изменяет исходное множество, внося в него структурное свойство отрицания – топологию. Выбирая в качестве значений оценки замкнутые множества топологического пространства и проводя аналогичные рассуждения, получим $A \subset \neg\neg A$ т. е., что отрицание отрицания включает в себя исходное множество.

Развитие метода, основанного на определении меры истинности как меры на некотором множестве, связано с понятием оценки.

«Оцениванием (оценкой) в данном языке для фиксированной решетки X называется сопоставление каждой формуле ϕ элемента из X, обозначаемого $\|\phi_k\|_X$ или короче $\|\phi_k\|$, причем логические связки языка моделируются операциями в решетке X. Последнее означает, что $\|\phi\wedge\psi\| = \|\phi\|\wedge\|\psi\|$, $\|\phi\vee\psi\| = \|\phi\|\vee\|\psi\|$, $\|\phi\to\psi\| = \|\phi\|\to\|\psi\|$, $\|\neg\phi\| = \neg\|\phi\|$» [6. с. 101].

При этом X рассматривается как импликативная решетка общего вида. Уже в этом случае, анализируя разные типы оценок, можно проследить то, как количественные изменения и сопоставляемая им мера определяют качественный тип логики, зафиксированный в системе аксиом логического исчисления [7, с. 164].

В [8, с. 151] приводится вариант логики с двумя типами отрицания – Н-В логики.

В случае пропозиционального исчисления, в котором алгебра формул есть булева алгебра или булева решетка отрицание эквивалентно дополнению. Однако, как известно, решетка общего вида имеет два вида дополнения.

Если решетка A имеет нулевой элемент 0, то $\cap$- дополнением элемента $a\in A$ называют наибольший элемент $c\in A$, для которого выполняется равенство $c\cap a=0$.

Если решетка A имеет единичный элемент 1, то $\cup$- дополнением элемента $a\in A$ называют наименьший элемент $d\in A$, для которого выполняется равенство $d\cup a=1$.

В булевой решетке $\cap$- дополнение одновременно является $\cup$- дополнением элемента $a\in A$.

Н-В логика, как следует из ее аксиом, не является булевой алгеброй.

Список аксиом Н-В логики состоит из всех формул вида [8, с. 151]:

1. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to\gamma)\to (\alpha\to\gamma))$	2. $\alpha\to \alpha \vee \beta$
3. $\beta\to \alpha \vee \beta$	4. $(\alpha \to\gamma)\ ((\beta\to\gamma) \to (\alpha \vee \beta\to\gamma))$
5. $\alpha \wedge \beta\to \alpha$	6. $\alpha \wedge \beta\to \beta$
7. $(\gamma\to\alpha) \to ((\gamma\to\beta) \to (\gamma\to\alpha\wedge \beta))$	8. $(\alpha \to (\beta\to\gamma)) \to (\alpha \wedge \beta \to\gamma)$

9. $(\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$
10. $\alpha \rightarrow (\beta \vee (\alpha \div \beta))$
11. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
12. $(\alpha \div \beta) \rightarrow \ulcorner(\alpha \rightarrow \beta)$
13. $((\alpha \div \beta) \div \gamma) \rightarrow (\alpha \div \beta \vee \gamma)$
14. $\neg(\alpha \div \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
15. $(\alpha \rightarrow (\gamma \div \gamma)) \rightarrow \neg\alpha$
16. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow (\gamma \div \gamma))$
17. $((\gamma \rightarrow \gamma) \div \alpha) \rightarrow \ulcorner\alpha$
18. $\ulcorner\alpha \rightarrow ((\gamma \rightarrow \gamma) \div \alpha)$

Правилами вывода являются modus ponens и

$(\ulcorner)$ $\alpha / (\neg \ulcorner \alpha)$.

Н-В исчисление есть алгебра $<A, \cap, \cup, \rightarrow, \div, \neg, \ulcorner, 0, 1>$.

В качестве семантической структуры, выберем структуру вида $<A, \cap, \cup, \Rightarrow, \div, -, \urcorner, 0, 1>$, которую назовем Н-В – алгеброй. Это решетка, в которой для любых двух элементов существуют псевдодополнение ($\Rightarrow$) и псевдоразность ($\div$). В такой решетке для каждого ее элемента а существует два вида дополнения: $\cap$-дополнение: $-a = a \Rightarrow 0$, и $\cup$-дополнение $\urcorner a = 1 \div a$. В [2, с 74] показано, что $\urcorner a \geq -a$.

Для операции ($\Rightarrow$) и отрицания ($-$) истинны утверждения (Н1-Н36) [4, с. 74–77], для ($\div$) и ($\urcorner$) (В1-В36), полученные из (Н1-Н36) на основании принципа двойственности [9, с. 388–390].

Аксиомы (1-9, 11) есть аксиомы интуиционистской логики и потому истинны в Н-В логике.

Остальные доказываются через свойства операций на импликативных решетках с двумя видами дополнения. Ниже приводятся эти доказательства, со ссылкой на свойства операций (Н1–Н36) как они приведены в [4, с. 76.] для импликативных решеток и псевдобулевой алгебры, обозначения (В1-В36) означают свойства операций двойственные к свойствам (Н1–Н36).

10. $\alpha \rightarrow (\beta \vee (\alpha \div \beta))$

Из определения операции ($\div$) получим, что $(\beta \vee (\alpha \div \beta)) \geq \alpha$. Тогда (10) следует из Н1.

12. $(\alpha \div \beta) \rightarrow \ulcorner(\alpha \rightarrow \beta)$

Из свойств дополнений $\urcorner(\alpha \rightarrow \beta) \geq -(\alpha \rightarrow \beta)$, кроме того, по определению, $\urcorner(\alpha \rightarrow \beta) \cup (\alpha \rightarrow \beta) \equiv 1$, откуда $\urcorner(\alpha \rightarrow \beta) \cup (\alpha \rightarrow \beta) \geq \alpha \cup (\alpha \rightarrow \beta) = (\alpha \cap \urcorner\beta) \cup (\alpha \rightarrow \beta) \geq (\alpha \cap -\beta) \cup (\alpha \rightarrow \beta)$, откуда $\urcorner(\alpha \rightarrow \beta) \geq (\alpha \cap -\beta)$ (12.1), иначе $\alpha \cup (\alpha \rightarrow \beta) \equiv 1$, но в решетке $A_{a \cap b}$ $\alpha \cup (\alpha \rightarrow \beta) = \alpha \cup -\alpha$ – противоречие. Неравенство (12.1) и Н1 дают искомый результат.

13. $(\alpha \div \beta) \div \gamma) \rightarrow (\alpha \div \beta \vee \gamma)$

Из В15 $((\alpha \div \beta) \div \gamma) = (\alpha \div \beta \vee \gamma)$, тогда из Н1 следует (13).

14. $\neg(\alpha \div \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$.

Действительно $-(\alpha \div \beta) \cap (\alpha \div \beta) = 0$, следовательно $\neg(\alpha \div \beta) \cap (\alpha \div \beta) \geq 0$. таким образом, $0 = -(\alpha \div \beta) \cap (\alpha \div \beta) \leq \beta \cap (\alpha \div \beta) = (-\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \div \beta) \leq$/в соответствии с (Н36)/$\leq (\alpha \rightarrow \beta) \cap (\alpha \div \beta)$, откуда $(\alpha \rightarrow \beta) \geq \urcorner(\alpha \div \beta)$ (14.1), иначе $\beta \cap (\alpha \div \beta) \equiv 0$, но в решетке $A_{a \cup b}$ $\beta \cap (\alpha \div \beta) = \beta \cap \urcorner\beta \geq 0$ –противоречие. Неравенство (14.1) и Н1 дают искомый результат.

15. $(\alpha \rightarrow (\gamma \div \gamma)) \rightarrow \neg\alpha$

Из В3 $(\gamma \div \gamma) = 0$, тогда (15) следует из определения псевдодополнения.

16. $\neg\alpha \to (\alpha \to (\gamma\div\gamma))$
Из В3 $(\gamma\div\gamma)=0$, тогда $(\alpha\to (\gamma\div\gamma)) = -\alpha$. Откуда из Н3 $-\alpha\to (\alpha \to(\gamma\div\gamma))$.
17. $((\gamma\to\gamma) \div \alpha) \to \ulcorner\alpha$
Из Н3 $(\gamma\to\gamma)=1$, тогда по определению $((\gamma\to\gamma) \div \alpha)= \urcorner\alpha$, откуда $((\gamma\to\gamma) \div \alpha) \to\urcorner\alpha$.
18. $\urcorner\alpha\to ((\gamma\to\gamma) \div \alpha)$
Доказывается так же как (17).

ОЦЕНКА НА БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЕ.

Определим оценку со значением в А как *гомоморфизм* $\upsilon:V_0\to A$, где А – некоторая не обязательно двухэлементная булева алгебра, в частности, $\upsilon:V_0\to \boldsymbol{P}(I)$, где I некоторое множество.

Пусть ϕ – формула языка структуры $\boldsymbol{K}$, и ϕ_k оценка этой формулы в решетке $\mathbf{B}=\{0,1\}$. $\|\phi_k\|$ – оценка этой формулы в $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$ [6, с. 78], т. е., оценкой будем называть функцию вида $\|\ \|:Fm\to\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$, где V число переменных языка L, а $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$ решетка, элементами которой служат подмножества $\boldsymbol{K}^V$. Булева решетка $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$ есть расширение решетки **B,** в котором $\boldsymbol{K}^V=1$, $\varnothing=0$. Однако в структуре $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$ значением оценки служит любое подмножество $J\subseteq\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$. По аналогии с [7, с. 378] введем предикат $Tr_j\ (\phi_k)\equiv(\|\phi_k\|\in j)$, где j – некоторое подсемейство $P(\ K^V)$. Рассмотрим, как выбор семейства j может повлиять на связь между оценками ϕ_k и $Tr_j\ (\phi_k)$, различие которых служит основанием для разделения типов логических исчислений.

В нестандартном анализе рассматривается множество – степень K^I, а оценка принимает значения на P(I), выбор в качестве j ультрафильтра в P(I) позволяет заменить $Tr_j\ (\phi_k)$ «обычной» истинностью суждения ϕ_kо структуре K^I. Поскольку для ультрапроизведений $K^I|j\equiv K^I|\sim_j$, имеем $\phi_{k|j}([f_1], [f_2],\ldots[f_n])\Leftrightarrow([\phi_k(f_1, f_2,\ldots,f_n)]\in j)$, где $[f_i]\in K^I|j$. Как будет показано ниже это фактор – множество содержит два элемента. Это обеспечивает эквивалентность обеих семантик. Ситуация в нестандартном анализе отличается от рассматриваемой далее выбором множества, на котором принимает значение оценка, однако имеет ту же диалектическую природу; а именно, истинность как мера на множестве индексов, не являющихся элементом ультрафильтра, является бесконечно малой величиной и, следовательно, результатов оценки формулы на этой совокупности индексов не достаточно для изменения в сторону понижения, если на оставшихся индексах она равна 1, и повышения, если она на них равна нулю.

Нас, как было указано, интересует случай, когда оценка есть функция $Fm\to\boldsymbol{P}(\boldsymbol{K}^V)$. Поскольку $\boldsymbol{K}^V$ есть семейство функций $f:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{K}$ из множества в множество, т. е. само является множеством, то будем рассматривать его как множество, проиндексированное некоторым семейством **I**. В дальнейшем $\boldsymbol{K}^V=\mathbf{I}$.

Если рассматривается оценка со значениями в $\boldsymbol{P}(\mathbf{I})$, т. е. оценка $\|\phi_k\|:\phi \to\boldsymbol{P}(\mathbf{I})$, то при условии, что j ультрафильтр над $\boldsymbol{P}(\mathbf{I})$ получим оценку в ультрапроизведении $\boldsymbol{P}(\mathbf{I})|\sim_j$,. В [4, с.64] доказано, что если фильтр j в псевдобулевой алгебре Амаксимален, то фактор - алгебра $A|\sim_j$, содержит два элемента, т. о. отношение эквивалентности $\sim_j$ приводит к оценке на булевой алгебре $\boldsymbol{P}(\mathbf{I})|\sim_j=\mathbf{B}=\{0,1\}$.

Пусть $\|\phi_k\|$ оценка формулы ϕ_k в $\boldsymbol{P}(\mathbf{I})$. Введем отношение $\sim_j$ между оценками, такое, что $\|\phi_k\|\sim_j\|\phi_k^1\|\Leftrightarrow\|\phi_k\|\Rightarrow\|\phi_k^1\|\in j$ и $\|\phi_k^1\|\Rightarrow\|\phi_k\|\in j$, где j фильтр решетки $\boldsymbol{P}(\mathbf{I})$.

В [4, с. 58] доказано, что $\sim_j$ отношение эквивалентности и для любой оценки $\|\phi_k\|$ такой, что $\|\phi_k\|\in j$ справедливо $\|\phi_k\|\sim_j\mathbf{I=1}$

Таким образом, как и в случае нестандартного анализа, выбор в качестве j максимального фильтра позволяет заменить $Tr_j(\phi_k)\equiv(\|\phi_k\|\in j)$ «обычной» истинностью суждения ϕ_k о структуре *K*. В то же время этого нельзя сделать при $Tr_j(\phi_k)\equiv(\|\phi_k\|=1)$, т. е. в случае если в качестве j выбран единичный фильтр. С математической точки зрения это объясняется тем, что при выбранном отношении эквивалентности только оценка равная **I** дает значение истинности равное 1. Кроме того, для любых оценок таких, что $\|\phi_k\|\subset\|\phi_k^1\|$ будет иметь место $\|\phi_k\|<\|\phi_k^1\|$. С позиции приведенных выше рассуждений, это означает, что при таком выборе фильтра каждый элемент множества **I** обладает конечной мерой и множество значений оценок эквивалентно мощности $\boldsymbol{P}(\mathbf{I})$.

Рассмотрим это подробнее. В работе [5, с. 378] рассматривается взаимоотношения семантик:

1) $Tr_j(\phi_k)\equiv(\|\phi_k\|=1)$ и ϕ_k, показано, что для оценки на булевой алгебре P(I) $Tr_j(\phi_k)\to\phi_k$ для хорновых формул, и $\phi_k\to Tr_j(\phi_k)\equiv(\|\phi_k\|=1)$ для позитивных. Т. е. в общем случае оценки при этих видах истинности в общем случае не совпадают.

2) В то же время для семантик $Tr_j(\phi_k)\equiv(\|\phi_k\|\in F)$, где F – ультрафильтр $Tr_j(\phi_k)\leftrightarrow\phi_k$ для всех формул. Оба утверждения доказываются индукцией по длине формул.

Рассмотрим оба взаимоотношения с точки зрения оценки как отображения на $P(I)|\sim_j$. Для этого, как и выше, на множестве оценок P(I) введем отношение эквивалентности $\sim_j$.

$Tr_j(\phi_k)\equiv(\|\phi_k\|\in F)$, где F – ультрафильтр. В этом случае $P(I)|\sim_j=P(I)|\sim_F=B$. Действительно, поскольку F ультрафильтр, то для любого $a\in P(I)$ $a\in F$ либо $-a\in F$. Следовательно, $\forall a\in P(I)$ либо $|a|=1$ и $|-a|=0$, либо $|a|=0$ и $|-a|=1$, где $|a|\in P(I)|\sim_F$. Таким образом, в этом случае структуры значений оценок для $Tr_j(\phi_k)$ и ϕ_k изоморфны. Это значит, что для каждого вида оценки, они сводятся к гомоморфизмам $\varphi:Fm\to B$ для оценки $Tr_j(\phi_k)$ и $\psi:Fm\to B$ для оценки (ϕ_k), причем эти гомоморфизмы совпадают на системе образующих алгебры Fm, а значит и на всей алгебре Fm.

$Tr_j(\phi_k)\equiv(\|\phi_k\|=1)$. В этом случае $P(I)|\sim_j=P(I)|\sim_1=P(I)$. Действительно, поскольку F ультрафильтр, то для любых $a\in P(I)$ $b\in P(I)$ $a\sim_1 b$ тогда и только тогда, когда $a\to b=1$ и $b\to a=1$, т. е., тогда и только тогда, когда $a=b$. Это означает, что $P(I)|\sim_F= P(I)$. Таким образом, в этом случае структуры значений оценок для $Tr_j(\phi_k)$ не ϕ_k изоморфны, если P(I) содержит более двух элементов.

Рассмотрение оценок позволяет получить простое доказательство следующего известного утверждения.

<u>Утверждение.</u>

Если фильтр над булевой алгеброй прост, то он максимален.

Доказательство.

Если это не так, то найдется $a \in P(I)$, такое, что $a \notin j$ и $-a \notin j$. Тогда $a \in i$ и $-a \in i$, где i – простой идеал и $i \cup j = I$, но тогда $\|a \cup -a\| < 1$ и $P(I)$ не булева алгебра. Пришли к противоречию.

ОЦЕНКА НА ПСЕВДОБУЛЕВОЙ АЛГЕБРЕ.

Рассмотрим случай, когда j – фильтр над импликативной решеткой (псевдобулевой алгеброй) $\mathfrak{I}(I) \subseteq P(I)$, элементы которого являются значением оценки некоторого суждения ϕ_k о структуре K.

Пусть $\|\phi_k\|$ оценка формулы ϕ_k в $\mathfrak{I}(K^V)$. Введем отношение ~ между оценками, причем $\|\phi_k\| \sim \|\phi_k^1\| \Leftrightarrow \|\phi_k\| \in j$ и $\|\phi_k^1\| \in j$.

Отношение ~ есть отношение эквивалентности на множестве оценок, кроме того, отношение эквивалентности $\sim_j$ такое, что $\|\phi_k\| \sim_j \|\phi_k^1\| \Leftrightarrow \|\phi_k\| \Rightarrow \|\phi_k^1\|$ и $\|\phi_k^1\| \Rightarrow \|\phi_k\|$, является расширением отношения эквивалентности ~.

Тогда фактор множество $\mathfrak{I}(I)|\sim_j$ есть упорядоченное множество оценок, такое, что при $\|\phi_k^1\| \in j$ $[\|\phi_k^1\|] = 1_{P(K^V)|\sim j}$. В случае, когда j, как выше, – максимальный фильтр, для фактор-множества $\mathfrak{I}(I)|\sim_j$ справедливо равенство $\mathfrak{I}(I)|\sim_j = \{0,1\}$. Логика, индуцированная оценкой, есть классическая логика. При выборе в качестве j единичного фильтра, логика, индуцированная оценкой, будет интуиционистской.

Пусть структура $\mathfrak{I}(I) \subseteq P(I)$ есть решетка A с нулем и единицей вида $\langle A, \cap, \cup, \rightarrow, \div, \neg, \ulcorner, 0, 1 \rangle$, где $\div$ есть относительная разность, $\ulcorner a = 1 \div a$, $\neg a = a \rightarrow 0$, т. е. решетка, в которой два вида дополнения. Выше было показано, что оценке со значениями в решетке A соответствует H-B логика. В этой логике закон противоречия не выполняется для отрицания $\ulcorner$, т. е. оценка $\|a \wedge \ulcorner a\| \geq 0$.

MODUS PONENS И ОЦЕНКА НА ПСЕВДОБУЛЕВОЙ АЛГЕБРЕ.

Структура, на которой принимает значение оценка формул некоторой теории, и тип отношения эквивалентности на структуре оценки, определяют не только тип логики, но и правила вывода, соответствующие этому типу логики. Например, приведенное в [6, с. 379] требование выполнимости правила modus ponens, которое на языке оценок выглядит как: $\|\phi_k\| = 1$, $\|\phi_k \Rightarrow \phi_k^1\| = 1$ влечет $\|\phi_k^1\| = 1$ (1) – частный случай правила $\|\phi_k\| \in j$, $\|\phi_k \Rightarrow \phi_k^1\| \in j$ влечет $\|\phi_k^1\| \in j$, (2), где j – фильтр на алгебре оценок. В modus ponens j=1. Но (2) – свойство импликативной решетки. Таким образом, modus ponens в форме (2) является правилом вывода для всех логик со значениями на импликативных решетках (псевдобулевых алгебрах).

При переходе на язык теории категорий модели, которые рассматриваются классической теорией, являются функторами из категории, соответствующей некоторой теории в категорию всех множеств. Рассматривая какую-либо другую категорию, обладающую дополнительной структурой, получим неклассическую теорию. Тип полученной теории будет индуцироваться заданной категорией и ограничениями, наложенными на функтор (его задаваемыми свойствами).

При таком подходе «логики» как вид исследования структур представляют собой семейство функторов из категорий, соответствующих формальным теориям в категории структур, на которых принимает значение оценка. В этом случае ***оценка есть функтор, сохраняющий дополнительную структуру***. Вид логики будет определяться типом функтора и, следовательно, минимальные логики будут представлять собой семейство, определяемое семейством баз, предбаз, образующих и т. д. структур значений оценки. Нельзя исключать и того, что сюда войдут функторы как гладкие отображения многообразий, поскольку в обиход уже введен термин «локальная истинность», в частности в [3] рассматривается язык PL, в который включена новая связка ∇ и, если α формула этого языка, то формула $\nabla\alpha$ читается «локально имеет место, что α».

Введение в теории категорий классификатора подобъектов Ω, и связанная с этим понятием Ω – аксиома, порождает утверждение, о том, что в категории, обладающей классификатором подобъектов, выполняется эквивалентность Sub (d) $\cong\boldsymbol{K}(d,\Omega)$. В частности, в качестве $\boldsymbol{K}$ можно взять категорию, соответствующую формальной теории (в частности алгебру формул логического исчисления), в качестве Ω – структуру, на которой принимает значение оценка. В [3, с.91] доказано, что утверждение о том, что топос $\boldsymbol{K}$ булев, эквивалентно утверждению о том, что SubΩ – булева алгебра. Этим определяются и ограничения на свойства функции $\chi(f):d\to\Omega$ – она должна сохранять структуру. В частности, подтверждается предположение о том, что структура оценки для булевой алгебры формул должна быть булевой алгеброй, что не всегда учитывается в многозначных логиках.

Список литературы

1. Лосев А. Ф. Диалектические основы математики / А. Ф. Лосев. – М.: Academia, 2013. – 797 с.
2. Гегель Г. В. Ф. Наука логики / Г. В. Ф. Гегель. – СПб.: Наука, 1997. – 799 с.
3. Голдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики / Р. Голдблат. – М.: Мир, 1983. – 468 с.
4. Рассева Е. Сикорский Р. Математика метаматематики / Е. Рассева, Р. Сикорский. – М.: Наука, 1972, – 591 с.
5. Любецкий В. А. Некоторые применения теории топосов к изучению алгебраических систем // П. Т Джонсон. Теория топосов. – М.: Наука, 1986. – С. 376–430
6. Любецкий В. А. Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа // УМН. – 1989. – Том 44. – №4 (269). – С. 99–153.
7. Титов А. В. Обобщенный нестандартный анализ и исследование форм логического исчисления на основе структур значений оценки. // Ученые записки Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского. Философия. Политология. Культурология. – 2015. – Том 1 (67). – № 1. – С. 164–171.
8. Васюков В. Л. Категорная логика / В. Л. Васюков. – М.: АНО Институт логики, 2005. – 194 с.
9. Титов А. В. Диалектика в развитии типов логических исчислений на основе структур значений оценки // Доказательство очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды Московского семинара по философии математики / Под. ред. В. А. Бажанова, А. Н. Кричевца, В. А. Шапошникова. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. – 432с.

Titov A. V. The Use of Non-Finite Methods in Semantic Approach in Researching Types of Formal Logics // Scientific Notes of V. I. Vernadsky Crimean Federal University. Philosophy. Political science. Culturology. – 2016. – Vol. 2 (68). – № 4. – P. 143–154.

The approach to studying types of logical calculi based on use of non-finite methods is considered. This allows to considerate a set of algebraic formulas of logic with equivalent relation entered on it as the quotient algebra. Methods of the theory of structures, or methods of the theory of categories can be involved in its

research. Use of this approach is proved by the fact that in a metamathematics the device of various sections of mathematics is used. This allows to consider a metamathematics as an object of mathematical research.

The use of non-finite methods in the studying the types of logical calculi is the development of the approach to researching types of formal logics on the basis of researching evaluation.

Such approach is the result of development of approach to a research of types of the formal logic on the basis of estimates research.

The non-standard analysis offers a new type the structure of estimates, but the equivalence relation entered on it does it by the two-valued Boolean algebra. As a result laws of classical logic remain. Transition to other types of an equivalence relation allows to receive non-classical logicians in whom the law of contradiction or excluded the third is not carried out. The fresh wording is found also by the rule modus ponens.

Keywords: evaluation, mathematical structure, measure semantics, lattice, relatively pseudo-complemented lattice, equivalence relation, logical calculus.

Referenses

1. Losev A. F. Dialekticheskie osnovy matematiki [The Dialectical Foundations of Mathematics]. Moscow, Academia, 2013, 797 p.
2. Gegel' G. V. F. Nauka logiki [Wissenschaft der Logik]. St. Petersburg, Nauka [Sciense], 1997, 799 p.
3. Goldblatt R. Toposy. Kategornyj analiz logiki [Toposi. The Categorial Analysis of Logic]. Moscow, Mir [World], 1983, 468 p.
4. Rasseva E. Sikorskij R. Matematika metamatematiki [The Mathematics of Metamathematics]. Moscow, Nauka [Sciense], 1972, 591 p.
5. Ljubeckij V. A. Nekotorye primenenija teorii toposov k izucheniju algebraicheskih sistem. P. T Dzhonson. Teorija toposov [Some Applications of Topos Theory to the Study of Algebraic Systems. P. T. Johnson. Topos Theory]. Moscow, Nauka [Sciense], 1986, P. 376–430
6. Ljubeckij V. A. Ocenki i puchki. O nekotoryh voprosah nestandartnogo analiza [Valuations and Sheaves. On Some Questions of Nonstandard Analysis]. Russian Mathematical Surveys, 1989, Vol. 44, no. 4 (269), P. 99–153.
7. Titov A. V. Obobshhennyj nestandartnyj analiz i issledovanie form logicheskogo ischislenija na osnove struktur znachenij ocenki [Generalized Non-Standard Analysis and Study of the Forms of Logical Calculation on the Basis of Assessment of Value Structures]. Uchenye zapiski Krymskogo federal'nogo universiteta im. V. I. Vernadskogo. Filosofija. Politologija. Kul'turologija. [Scientific Notes of V. I. Vernadsky Crimean Federal University. Philosophy. Political science. Culturology], 2015, Vol. 1 (67), no. 1, P. 164–171.
8. Vasjukov V. L. Kategornaja logika [Categorical Logic]. Moscow, ANO Institute of logics, 2005, 194 p.
9. Titov A. V. Dialektika v razvitii tipov logicheskih ischislenij na osnove struktur znachenij ocenki [The Dialectic in the Development of Types of Logical Calculi on the Basis of Structures of the Estimated Values]. Proof. Moscow Studies in the Philosophy of Mathematics ed. by V. A. Bazanova, A. N. Krichevets, V. A. Shaposhnikov, Moscow, Book house LIBROKOM, 2014, 432p.

Редакция журнала сердечно поздравляет с юбилеем Владимира Николаевича Николко!

Владимир Николаевич является нашим постоянным автором, бессменным организатором и руководителем теоретического семинара по логике и методологии науки, проводимого в рамках проекта «Анахарсис», одним из инициаторов образования философского факультета Таврической академии.

В последнее время Владимир Николаевич сосредоточил свои научные интересы исключительно на формально-логической тематике, позиционируя себя как сторонника функционалистского подхода в логике. Ему удалось выделить класс логических нестандартных функций, которые находятся за пределами функций алгебры логики, что создает возможности переосмысления материала современной логики. Перспективным видится задание множества определений, понимаемых как речевое выражение в предложной и словной формах сущности вещей. Разработка последней разновидности определений делает построение формальных систем определений сопоставимым с исследованием выводных процессов.