Ученые записки Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского
Философия. Политология. Культурология. Том 2 (68). 2016. № 4. С. 137–142.

УДК: 164.1

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИМПЛИКАТИВНОЙ УСЛОВНОЙ СВЯЗИ ПОСРЕДСТВОМ ОБЪЕДИНЕНИЯ ЕЕ ВИДОВ

Николко В. Н.

Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация

E-mail: vnnikolko@mail.ru

Различаются импликация как двузначный, двуместный функтор α (φ, ψ), где φ, ψ – простые высказывания, и импликативно условная связь высказываний ($\varphi \rightarrow \psi$). Импликация $\alpha(\varphi,\psi)$ не означает, что ($\varphi \rightarrow \psi$); ($\varphi \rightarrow \psi$) только и если только α (φ, ψ) – тождественно истинное. Не всё, что говорится о α (φ, ψ), можно сказать относительно ($\varphi \rightarrow \psi$). Например, α (φ, ψ) для любых высказываний равно ($\neg\varphi \vee \psi$), где $\neg$ – отрицание, а $\vee$ – дизъюнкция, в то время как ($\varphi \rightarrow \psi$) не равно ($\neg\varphi \vee \psi$). Принимается система высказываний G, в которой вопрос о представлении функции ($\varphi \rightarrow \psi$) через другие функции решен. При этом определяются значения для высказываний из G любой степени сложности Так, два высказывания φ (x_1, x_2, …, x_n) и ψ (x_1, x_2, …, x_n) G-множества определяются как формально независимые на M, если и только если для любых пакетов значений их аргументов (a_1, a_2, …, a_n), где a_i принадлежит M (для i от 1 до n), выражение ($\varphi\psi$) может принимать только следующие значения истинности-ложности: или (11), или (10), или (01), или (00). Всего выделяются семь видов импликативной условной связи: $\varphi \xrightarrow[1]{} \psi$, $\varphi \xrightarrow[2]{} \psi$ и т. д. $\varphi \xrightarrow[7]{} \psi$, объединение которых эквивалентно $\varphi \rightarrow \psi$.

Ключевые слова: импликация, импликативная условная связь, виды импликативной условной связи, объединение видов И-условной связи.

Цель: Представить импликативную (И) условную связь посредством объединения ее видов.

Новизна: Выделяются семь видов импликативной условной связи.

К сожалению, мало встречается текстов, в которых воспроизводится точный смысл термина импликация, что, как пишет Переверзев В. Н. в [1, с. 52], «приводит к логическим ошибкам и различного рода парадоксам, в частности к парадоксам импликации».

Большинство определяют импликацию так, как это сделано Ю. А. Шихановичем: «Импликация высказываний А и В обозначается А→В и означает высказывание, ложное в том и только том случае, когда посылка А – истинна, и заключение В – ложно. Импликация А→В высказываний А и В означает то же, что высказывания "если А, то В", "из А следует В", "А влечёт В"» [2, с. 130]. Правильнее было бы определять импликацию как двуместный, двузначный функтор α_3, действующий в множестве высказываний и преобразующий всякие два высказывания вида φ и ψ в некоторое третье высказывание α_3 (φ, ψ). Последнее ложно только в том случае, когда φ истинно, а ψ – ложно, и истинно во всех остальных случаях (т. е. когда φ ложно, а ψ – истинно; когда φ и ψ оба истинны; когда φ, ψ оба ложны). В этом случае импликация не должна отождествляться с условной связью «если … то…». Иными словами, импликация представляет собой двузначный, двуместный функтор $\alpha_3(\varphi, \psi)$, который полностью определен таблицей истинности 1.

φ	ψ	$\alpha_3(\varphi, \psi)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Очевидно, определение $\alpha_3(\varphi, \psi)$ обеспечивает существование для любых двух высказываний A, B из области изменений φ, ψ некоторое $C = \alpha_3(A, B)$; но столь же очевидно, что определение импликации не утверждает, что A, B при этом вступают в условную связь или находятся с необходимостью в ней, записываются в виде $(A \to B)$, читаются как «если A, то B». Для этого существует принцип введения условной связи, который гласит: для того, чтобы функции φ, ψ находились в условной связи, произносились как «если φ, то ψ», записывались $(\varphi \to \psi)$ необходимо и достаточно, чтобы φ, ψ были такими, что $\alpha_3(\varphi, \psi)$ – тождественно истинная формула. Поэтому $\alpha_3(\varphi, \psi)$ и $(\varphi \to \psi)$, хотя и являются высказываниями, но являются разными. Следует различать $\varphi \to \psi$ и $\alpha_3(\varphi, \psi)$, и это различие состоит в том, что формула $(\varphi \to \psi)$ – тождественно истинная, а $\alpha_3(\varphi, \psi)$ – не обязательно таковая. Все, что относится к определению $\alpha_3(\varphi, \psi)$, не обязательно относится к определению $(\varphi \to \psi)$. Так, например, $\alpha_3(\varphi, \psi)$ представимо через другие функции алгебры логики, в частности:

$(\varphi \wedge \psi) = Df_1\ \neg\alpha_3(\varphi, \neg\psi)$

$(\varphi \vee \psi) = Df_2\ \alpha_3(\neg\varphi, \psi)$, где $\neg$ – знак отрицания формулы, стоящей после неё, а $\wedge$,$\vee$ – знаки конъюнкции и дизъюнкции, соответственно; Df – знак (по определению). Можно также согласиться с Переверзевым В. Н. в том, что «точную логическую формализацию содержательного определения оператора $\alpha_3(\varphi,\psi)$ обеспечивает следующее синтаксическое определение

$\alpha_3(\varphi, \psi) = Df_3\ [(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)]$. При этом путем эквивалентных преобразований нетрудно показать, что определению Df_3 эквивалентны два следующих коротких определения:

$\alpha_3(\varphi, \psi) = Df_4\ (\neg\varphi \vee \psi)$,

$\alpha_3(\varphi, \psi) = Df_5\ \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$» [2, с. 52]. Однако, и это очевидно, $(\varphi \to \psi)$ не определяется ни f_3, ни f_4, ни f_5, исключительно по одной причине: $(\varphi \to \psi)$ – тождественно истина, а $\alpha_3(\varphi,\psi)$ – не обязательно таковая. Итак,

$(\varphi \to \psi) \neq Df_4\ (\neg\varphi \vee \psi)$, или $(\varphi \to \psi) \neq Df_5\ \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$.

Констатируем: вопрос об определении высказывания $(\varphi \to \psi)$ посредством других функций алгебры логики пока не решен.

Ниже предлагается система высказываний G, в которой вопрос о представлении функции $(\varphi \to \psi)$ через другие функции решен. Доказывается следующая теорема:

если высказывания φ, ψ находятся в И-условной связи, то есть $(\varphi \to \psi)$ – тождественно истинное, то $(\varphi \to \psi) = Df[(\varphi \xrightarrow[1]{} \psi) \vee (\varphi \xrightarrow[2]{} \psi) \vee (\varphi \xrightarrow[3]{} \psi) \vee$

$\vee (\varphi \xrightarrow[4]{} \psi) \vee (\varphi \xrightarrow[5]{} \psi) \vee (\varphi \xrightarrow[6]{} \psi) \vee (\varphi \xrightarrow[7]{} \psi)]$, где $\vee$ – объединения; $(\varphi \xrightarrow[i]{} \psi)$, i от 1 до 7 – виды импликативной условной связи.

Пусть имеется некоторое множество G высказываний, представляющих собой двузначные, n – местные функции f $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, аргументы которых $x_1, x_2, \ldots, x_n$– предметные или пропозициональные переменные, определены в множестве M общих имен или пропозиций так, что f $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ принадлежит M^2 [0,1], если и только если a_i принадлежит M (для i от 1 до n).

Пусть, далее, в множестве G действуют три двузначных двуместных функтора α_1 (конъюнкция), α_2 (дизъюнкция), α_3 (импликация) и один двузначный, одноместный функтор – отрицание. α_1,α_2 и отрицание определяются так, как это сделано В. Н. Переверзевым в <1>. Определение α_3 дано выше.

Помимо высказываний в G множестве имеют место выражения, являющиеся строчками конечного числа разных высказываний. Например, если φ, ψ, f – высказывания G системы, то (φ ψ f), (φ f ψ), (f ψ φ) и т. д. – его выражения. Выражения могут быть однослоговыми, двуслоговыми и т. д. – n-слоговыми в зависимости от того, из какого числа высказываний они состоят. Каждое выражение имеет матрицу истинности из 0 и 1. Например, двуслоговое выражение $[f_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ f_2 (x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ при подстановке отдельных пакетов значений переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, таких, как $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где a_i из M для i от 1 до n, получает соответствующие значения или (11), или (10), или (01), или (00). Каким бы ни было число возможных пакетов значений переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, число разных строчек таблицы истинности выражения (f_1f_2) не может быть больше четырех. Набор разных строчек значений (f_1f_2) будем называть таблицей истинности выражений (f_1f_2).

Аналогично вычисляются таблицы трехслоговых и т. д. n-слоговых выражений G-множества.

Определение 1. Два высказывания φ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и ψ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ G-множества формально независимы на M, если и только если для любых пакетов значений их аргументов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где a_i принадлежит M (для i от 1 до n), выражение (φψ) может принимать только следующие значения истинности-ложности: или (11), или (10), или (01), или (00). Иными словами, – если и только если таблица истинности выражения (φψ) имеет четыре разных строчки.

Определение 2. Высказывания φ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и ψ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – формально связаны на множестве M, если и только если таблица истинности выражения (φψ) имеет не более трех разных строчек. Например, φ и ψ связаны, если (φψ) имеет матрицы вида:

φ	ψ		φ	ψ		φ	ψ
1	1		1	0		1	0
0	1		0	1		0	0
0	0,	или	1	1,	или		и т. д.

Если выражение состоит из трех высказываний – f_1, f_2, f_3, с одним и тем же набором аргументов, заданными в M, то f_1, f_2, f_3 – формально независимы, если и только если таблица истинности выражения $(f_1f_2f_3)$ имеет 2^3=8 разных строчек. В противном случае f_1, f_2, f_3формально связаны.

Аналогично: если выражение состоит из m высказываний $f_1 (x_1, \ldots, x_n)$, $f_2 (x_1, \ldots, x_n)$, … , $f_m (x_1, \ldots, x_n)$, то $f_1, f_2, \ldots, f_m$ формально независимы, если и только если таблица истинности выражения $(f_1 f_2 \ldots f_m)$ имеет 2^m разных строк; если же меньше, то $f_1, f_2, \ldots, f_m$ формально связаны.

Определение 3. Если и только если выражение $(f_1 f_2)$ характеризуется матрицей X из трех или менее разных строк, то $f_2 = \Phi(f_1)$, где Φ – оператор, который полностью определен таблицей X.

Нетрудно перебрать все возможные матрицы, состоящие из 0 и 1 для двух столбцов при числе разных строк, не больше трех. Таких матриц – 14, причем выделяются два класса матриц:

- не имеющих плохую строчку 10
- имеющих плохую строчку 10.

В первый класс входят семь таблиц:

11	11	01	11	11,	00,	01.
01	01,	00,	00,			
00,						

Назовем таблицы слева направо И-1 таблицей, И-2–таблицей и т. д., И-7–таблицей.

Семь таблиц, имеющих плохую строчку, таковы

10	10	10	10	01	10	10.
01	11	01	00,	10,	11,	
00,	00,	11				

Пусть, далее, в множестве G действует принцип И (импликационной) условной связи в той форме, как он сформулирован выше, благодаря чему среди высказываний G-множества появляются высказывания вида $\varphi \rightarrow \psi$, для которых $\alpha_3 (\varphi, \psi)$ – тождественно-истинны. Тогда в G множестве имеет место следующая ситуация: если φ и ψ – высказывания из G, такие, что $\psi = \Phi_1(\varphi)$, где Φ_1 – оператор, который полностью определяется таблицей 1:

Φ	$\psi = \Phi_1(\varphi)$,
1	1
0	1
0	0

то $\varphi \rightarrow \psi$ – И-условно связаны.

Условную зависимость ψ от φ, задаваемую Φ_1, будем называть И-1 условной связью; записывать в виде формулы $\varphi \xrightarrow[1]{} \psi$.

В самом деле, если φ, ψ – высказывания из G-множества, которые при любых наборах значений из М их пропозициональных или предметных переменных могут принимать только значение истинности-ложности из таблицы 1

φ	ψ		$\alpha_3 (\varphi, \psi)$
1	1		1
0	1		1
0	0,	то	1,

то есть $\alpha_3 (\varphi, \psi)$ – тождественно истинная импликация, что является необходимым и достаточным условием:

- для И-условной связи φ и ψ;
- для $\varphi \xrightarrow[1]{} \psi$ быть видом И-условной связи;
- для ψ быть $Ф_1$-функцией от φ.

Помимо И-1 условной связи высказываний типа $\varphi \xrightarrow[1]{} \psi$, существуют еще шесть видов И-условной связи, шесть видов условной связи «если … то», шесть видов функций, аналогичных функции $Ф_1$. С этой целью доказывается теорема 1: если высказывания φ, ψ G-множества функционно связаны и $\psi = Ф_i(\varphi)$ так, что $Ф_i$ полностью определяется таблицей номер i из ряда таблиц истинности без плохой строчки, а именно:

φ	$Ф_2(\varphi)=\psi$		φ	$Ф_3(\varphi)$		φ	$Ф_4(\varphi)$		φ	$Ф_5(\varphi)$		φ	$Ф_6(\varphi)$		φ	$Ф_7(\varphi)$	
1	1	(2),	0	1	(3),	1	1	(4),	1	1	(5),	0	0	(6),	0	1	(7),
0	1		0	0		0	0										

то φ, ψ во всех шести случаях условно связаны, представляют собой виды И-условной связи, могут записываться в виде формул $\varphi \xrightarrow[i]{} \psi$ (где i – от 2 до 7). Тогда ясно, что высказывание $f_1 \to f_2$ определимо через перебор всех видов И-условной связи: для любых f_1и f_2 из G-множества высказываний $f_1 \to f_2$ тогда и только тогда, когда имеет место $f_1 \xrightarrow[1]{} f_2$, или $f_1 \xrightarrow[2]{} f_2$, или $f_1 \xrightarrow[3]{} f_2$, или $f_1 \xrightarrow[4]{} f_2$, или $f_1 \xrightarrow[5]{} f_2$, или $f_1 \xrightarrow[6]{} f_2$, или $f_1 \xrightarrow[7]{} f_2$, что эквивалентно $(f_1 \to f_2) = Df[(f_1 \xrightarrow[1]{} f_2) \vee (f_1 \xrightarrow[2]{} f_2) \vee (f_1 \xrightarrow[3]{} f_2) \vee (f_1 \xrightarrow[4]{} f_2) \vee (f_1 \xrightarrow[5]{} f_2) \vee (f_1 \xrightarrow[6]{} f_2) \vee$ $\vee (f_1 \xrightarrow[7]{} f_2)]$, где Df – знак дефиниции, $\vee$ – знак дизъюнкции

Список литературы

1. Логический словарь ДЕФОРТ (под ред. А. А. Ивина, В. Н. Переверзева, В. В. Петрова). – М.: Мысль, 1994. – 268 с.
2. Шиханович Ю. А. Введение в современную математику. Начальные понятия / Ю. А. Шиханович. – М.: Наука, 1965. – 370 с.
3. Николко В. Н. Об одном классе логических функций (функторах) // Ученые записки Крымского Федерального университета имени В. И. Вернадского. Философия. Политология. Культурология. – 2015. – Том 1 (67) – №1. – С. 148–155.

Nikolko V. N. Presentation of Implicative Conditioned Connection by Uniting its Kinds // Scientific Notes of Crimea Federal V. I. Vernadsky University. Philosophy. Political science. Culturology. – 2016. – Vol. 2 (68). – № 4. – P. 137–142

There are differed implication as the two-digit, two-place functor α (φ, ψ), where φ, ψ – simple statements, and implicative conditional relationship ($\varphi \to \psi$). The implication α (φ, ψ) does not mean that ($\varphi \to \psi$); ($\varphi \to \psi$) if and only if α (φ, ψ) is identically true. Not everything that is said about α (φ, ψ) can be said with respect to ($\varphi \to \psi$). For example, α (φ, ψ) for any words anyway ($\neg\varphi \vee \psi$), where $\neg$ isnegation and $\vee$ is disjunction, while ($\varphi \to \psi$) is not equal to ($\neg\varphi \vee \psi$). It is adapted the system G: suppose we have a set G of statements, which are double-digit, n - placed function f (x_1, x_2, ..., x_n) where arguments x_1, x_2, ..., $x_n$areindividual or propositional variables defined in a set of M as common names or propositions so that f (a_1, a_2, ..., a_n) belongs M_2 [0.1] if and only if M belongs a_i (for i from 1 to n).The question on the representation of the function ($\varphi \to \psi$) is resolved through other functions on G.

It identifies the values for propositions from G of any degree of complexity. For example, two statements φ (x_1, x_2, ..., x_n) and ψ (x_1, x_2, ..., x_n) from G are defined as formally independent on M if and only if for all values of their arguments (a_1, a_2, ..., a_n), where a_i belongs to M (for i from 1 to the n), the expression ($\varphi\psi$) can only take on the following values of truth, falsity, either (11) or (10), or (01) or (00). Propositions φ (x_1, x_2, ..., x_n) and ψ (x_1, x_2, ..., x_n) are formally linked onthe M-set, if and only if the truth table expression ($\varphi\psi$) has no more than three different lines.Totallythere are revealed seven types implicative conditional relation: φ ψ, φ ψ, etc. φ ψ, the union of which is equivalent to φ → ψ.

Keywords: implication, implicative conditional connection, kinds of the implicative conditional connection, unitingkinds of I-implicative conditional connection.

References

1. Logicheskij slovar' DEFORT (pod red. A. A. Ivina, V. N. Pereverzeva, V. V. Petrova) [Logical Dictionary DEFORT]. Moscow, Mysl Publ., 1994., 268 p.
2. Shihanovich Yu. A. Vvedenie v sovremennuyu matematiku. Nachal'nye ponyatiya [Introduction to modern mathematics. Basic concepts]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 370 p.
3. Nikolko V. N. Ob odnom klasse logicheskih funkcij (funktorah) [On a class of logic functions (functors)]. Uchenye zapiski Krymskogo Federal'nogo universiteta imeni V. I. Vernadskogo [Scientific Notes of Crimea Federal V. I. Vernadsky University. Philosophy. Political sciences. Culturology]. 2015, Vol. 1 (67), no. 1, P.148–155.