Ученые записки Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского
Философия. Политология. Культурология. Том 1 (67). 2015. № 2. С. 189–297.

УДК 164.07

ПРОБЛЕМНОЕ ПОЛЕ ТЕОРЕМ ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ

Шкорубская Е.Г.

Теоремы Гёделя, сформулированные и доказанные им в 1931 г. вызвали интерес различных научных дисциплин, во-первых, к непосредственным результатам, а, во-вторых, к актуальным и потенциальным следствиям данных теорем. В данной статье рассматривается первая теорема Гёделя о неполноте и непротиворечивости формальных систем. Намечается проблемное поле, существующее вокруг результатов, полученных Гёделем касательно неполноты элементарной арифметики и систем, в которых она может быть выразима. В частности, разъясняются аспекты понятия полноты формальной системы (функциональный и дедуктивный), в общем смысле и в понимании их Гёделем. Кроме того, анализируются сходства и различия гёделева суждения с парадоксом лжеца и поднимается вопрос о необходимости обращения к парадоксам для доказательства неполноты формальной системы. Даётся краткий обзор интерпретаций логико-математического и философского наследия Гёделя. Отмечается заслуживающий отдельного внимания феномен периодического возрастания интереса к работам Гёделя в академической среде, представленный в виде «трёх волн», различающихся, прежде всего, акцентами, расставляемыми при исследовании данных работ. Очерчиваются возможные источники постоянного возвращения к теоремам о неполноте. Постулируется проблема избыточных интерпретаций и необоснованных экспликаций теорем о неполноте на области знания, не относящиеся непосредственно к математической логике и логике вообще. Выдвигается предположение об ограничении следствий данных теорем для философии и методологии науки с целью устранения неясностей и туманностей, порождающих всевозможные споры и излишние интерпретации.

***Ключевые слова**: полнота, непротиворечивость, формальная система, Курт Гёдель*

Цель статьи: наметить основные проблемные вопросы, возникающие в связи с теоремами Гёделя о неполное и непротиворечивости формальных систем, показать неясности, имеющие место в доказательстве и рассмотреть различные интерпретации наследия Гёделя.

Новизна работы заключается в обнаружении некоторых причин, приводящих к неясностям в интерпретациях теорем Гёделя о неполноте, а также в выделении трёх волн интереса к исследованиям результатов, полученных Гёделем.

7 октября 1930 г., на конференции по основаниям математики в Кёнигсберге Гёдель выступил с двумя докладами. Первый посвящался доказательству полноты первопорядковой логики предикатов, второй – доказательству принципиальной неполноты всех формальных систем, в которые можно погрузить обычную арифметику. Позже второй доклад был опубликован в качестве статьи «Über formal unentscheidbare Sätzeder Principia mathematica und verwandter Systeme I (1931)» [1]. Результаты, полученные Гёделем, произвели фурор среди математиков, логиков и философов. До сих пор во многих текстах, посвящённых теореме о неполноте, её связывают с такими эпитетами как «знаменитая», «невероятная», «поразительная» и так далее.

Следует согласиться, что результаты, полученные Гёделем, весьма интересны и значимы: они демонстрируют границы формализации простейшей арифметики, а также описывают определённые свойства формальных систем (например, взаимосвязь непротиворечивости, выразительности и полноты). Однако, следует заметить, что помимо прояснения ситуации с формализацией арифметики, данная теорема породила немалое количество неясностей, которые в дальнейшем повлекли за собой достаточно спорные и малообоснованные интерпретации, вплоть до ограниченности или же, наоборот, безграничности человеческого разума. Причём источник подобных интерпретаций сложно отследить. Например, В.В.Целищев в статье «Рационалистический оптимизм и философия Курта Гёделя» пишет о теоремах о неполноте, что они «по общему признанию, имеют важные философские следствия о пределах возможностей человеческого мышления» [2, с. 12]. Представляется весьма странным, что математическая или логико-математическая теорема (пусть даже фундаментальная) действительно имеет своим следствием какие-либо сведения о таком сложнейшем феномене, как человеческое мышление. Также необходимо прояснить значимость его результатов для логики в целом. Очевидно, что здесь имеет место некоторое проблемное поле, которое и будет обозначено в рамках данной статьи.

Точная формулировка первой теоремы о неполноте формальных систем, приводимая Гёделем в его статье как Теорема VI, звучит следующим образом: «Для каждого ω-непротиворечивого рекурсивного класса формул существует рекурсивный знак класса r, такой, что ни *v* Gen *r*, ни Neg (*v* Gen *r*) не принадлежат Flg (*c*) (где *v* – свободная переменная из *r*)» [1, с. 173]. Если расшифровать обозначения Гёделя, получим следующее: «Для каждого класса формул, подчинённого определённым условиям, существует формула такая, что ни она, ни её отрицание не принадлежат множеству следствий данного класса формул». По сути, это и является критерием неполноты формальной системы, о котором идёт речь – наличие такого суждения, которое невозможно ни доказать, ни опровергнуть средствами данной системы (такое суждение называется неразрешимым). Следует более подробно рассмотреть этот критерий, так как он является краеугольным камнем всей последующей риторики о следствиях теоремы.

В «Философской энциклопедии» о полноте говорится следующее: «В общем смысле под полнотой понимается достаточность выразительных или дедуктивных средств формальной системы для каких-либо определённых целей. В соответствии с этим различают функциональную полноту и дедуктивную полноту, однако чаще всего при использовании понятия «полнота» подразумевают именно дедуктивную полноту формальной системы» [3, с. 302-304]. Это деление позволит прояснить трактовку Гёделем полноты. Хотя в своей работе он практически не употребляет слово «полнота», это понятие используется им в обоих смыслах.

Итак, функциональная полнота представляет собой достаточность формальной системы для определённых целей. Это является необходимым требованием, которое предъявляется к формальным системам для применимости к ним данной теоремы. Формальная система должна быть «достаточно богата», то есть, её выразительных средств должно хватать, во-первых, для того чтобы иметь возможность сформулировать метаматематические понятия (такие как «переменная», «формула», «пропозициональная формула», «аксиома», «доказуемая формула», и т.д.), а во-вторых, чтобы в данную системы можно было погрузить элементарную арифметику (то есть натуральные числа, отношение следования, операции сложения и умножения и отношение равенства). Таким образом, функциональная полнота ставится Гёделем в условие применимости теоремы.

Далее, дедуктивная полнота, о которой идёт речь в данной теореме, состоит в следующем: формальная система называется полной, если для каждой правильно образованной формулы данной системы доказуема или данная формула, или её отрицание. То есть, если не существует такого суждения, для которого не было бы доказуемо ни оно само, ни его отрицание. Требование полноты в общем смысле является требованием доказуемости всех истинных формул формальной системы, полученных из её аксиом средствами данной системы.

Это требование, равно как и доказательство полноты, было на повестке дня в дискуссии об основаниях математики, поднятой программой Гильберта. Проблемы непротиворечивости математики и полноты аксиоматических систем оставались одними из немногих нерешённых вопросов, в равной степени для логицистов, интуиционистов и формалистов. Особенно внимательны к ним были формалисты, возглавляемые Гильбертом. Так, в «Основах теоретической логики» Гильберт доказывает полноту системы аксиом исчисления высказываний и исчисления предикатов, причём в более строгой формулировке, чем используемая Гёделем [4, с. 66-67]. Идеалом аксиоматизации математики на тот момент было создание непротиворечивой системы аксиом со строго заданными правилами вывода, с помощью которых можно было бы получить все без исключения истинные математические формулы. В математическом знании, по мнению формалистов, не должно было оставаться лакун, пустых мест, в которых возникали бы формулы, истинные в математическом смысле, но не имеющие средств для их доказательства или опровержения.

Новаторство Гёделя заключается же в том, что он доказал не просто неполноту элементарной арифметики, но и её принципиальную непополнимость (добавление истинного неразрешимого суждения к списку аксиом не устраняет неполноту системы). Кроме того, тем самым неразрешимым суждением, которое обнаруживает неполноту любой формализации теории чисел, является суждение о непротиворечивости теории чисел. Это – вторая теорема Гёделя о неполноте. Интересен тот факт, что со времени публикации теорем появилось немало формулировок и вариантов доказательства теоремы, в том числе и отличных от оригинального доказательства. Обзор этих формулировок и доказательств представляет собой предмет отдельного исследования, выходящего за рамки данной статьи. Однако, следует отметить, что некоторые из них (например, приводимое в [5] доказательство Колмогорова), построены без обращения к эпистемическим парадоксам, как это сделано в оригинальном доказательстве, и само по себе это различие заставляет задуматься, зачем же было обращаться к парадоксам Гёделю.

В своём доказательстве Гёдель опирается на некоторый числовой код (введённый им же и названный впоследствии «гёделевской нумерацией»), которым он зашифровывает некоторое высказывание, повествующее о собственной недоказуемости. Гёделевское высказывание (обозначим его через $[R(q); q]$, как это сделано в [1]) имеет очевидное сходство с парадоксом лжеца, вплоть до того, что иногда Гёделю приписывается заслуга в строгой формализации парадокса лжеца в этом усматривается его главное достижение. Тем не менее, здесь скорее имеет место именно подобие, нежели эквивалентность. Рассмотрим парадокс лжеца формы «Это суждение ложно». Это одноуровневый парадокс, в котором противоречие очевидно и не требует подробных разъяснений. Более сложной будет форма, состоящая из двух предложений «Следующее суждение истинно. Предыдущее суждение ложно». Здесь каждое из предложений в отдельности не несёт в себе противоречия, и может быть как истинным, так и ложным. Будучи объединёнными в одну конструкцию, они представляют собой частный случай парадокса лжеца.

Вернёмся к высказыванию $[R(q); q]$. Его отличие от оригинального парадокса как количественное, так и качественное. Первое заключается в количестве шагов, сделанных при формулировке высказывания. Будучи полностью расшифрованным, оно звучит следующим образом: «Формула, стоящая на q-м месте в последовательности, недоказуема». При этом q-я формула в последовательности является формулой $[R(q); q]$. Таким образом, между формулой, заявляющей о недоказуемости некоторой формулы и обнаружением, что она говорит о самой себе, существует переход, сравнимый с жестом фокусника, который вытаскивает потерянную монету из кармана удивлённого зрителя. С той только разницей, что здесь не идёт речи о фокусах. Этот поворот становится возможен благодаря введению Гёделем числового кода, который позволяет жонглировать натуральными числами, как просто числами и как некоторыми формулами, закодированными в виде числа. Изначально шла речь о недоказуемости совершенно определённой формулы, полученной из q-го члена последовательности формул путём заранее заданной подстановки. Недоказуемость конечной формулы мы получаем практически непреднамеренно, можно сказать, случайно, в ходе наших рассуждений. Качественное отличие $[R(q); q]$ от парадокса лжеца заключается в том, что используемый обычно в таких случаях критерий истинности заменяется критерием доказуемости, причём доказуемости, понимаемой в механическом смысле – как возможности за счётное количество шагов из заданных аксиом с помощью правил вывода получить требуемый результат. Однако, в числе требований, предъявляемых к формальной системе, в которой формулируется это высказываний – истинность всех доказуемых формул. Что, пусть и опосредовано, возвращает нас к принципиальной схожести с парадоксом лжеца.

Пока что единственным существенным отличием от прочих эпистемологических парадоксов является то, что суждение $[R(q); q]$, несомненно, истинно, так как, утверждая собственную недоказуемость, оно действительно является недоказуемым. Хоть это неразрешимо в рамках системы, в которой оно сформулировано, на метаматематическом уровне оно безусловно истинно, что ставит это суждение в особое положение относительно других парадоксальных суждений.

Следует отметить, что, вводя числовой код и выстраивая доказательство на основании этого кода, Гёдель не уточняет, какое именно суждение им кодируется. Фактически, это такое суждение, которое постулирует собственную недоказуемость. Само по себе оно свидетельствует о возможности построения неразрешимого суждения. Однако, Гёдель не приводит конкретных примеров подобного рода суждений, по-видимому, считая это излишним. В математической и логико-математической среде это привело к поиску «гёделевых суждений», существование которых могло бы на деле, в объективной математической реальности, подтвердить результаты, полученные Гёделем.

Кроме того, несмотря на то, что в теореме о неполноте речь идёт о действиях над натуральными числами и о суждении о свойствах натуральных чисел (то есть, в конечном счёте, о неполноте и непополнимости теории чисел и систем, в которые она может быть погружена), этому не уделяется должное внимание. Вместе с обширным употреблением метаматематических понятий (таких как «доказуемость», «теорема», «аксиома», «неразрешимость») это открывает простор для неоправданного расширения результатов Гёделя, и без того весьма значимых для математики.

В связи со всем вышесказанным, представляет интерес и то, каким образом происходило освоение и изучение результатов, полученных Гёделем. То, как это происходило, также наталкивает на мысль о некоторой непрояснённости теоремы и получаемых из неё следствий.

Представляется возможным выделить три волны интереса к проблематике, обозначенной Гёделем. Здесь различие не столько в хронологии (хотя и оно имеет место), сколько в степени рефлексии и предмете приложения полученных им результатов. Разумеется, деление исследовательских работ о Гёделе на три волны является условным, и в одной работе можно увидеть признаки всех трёх течений, однако подобное разделение позволяет обнажить проблему истолкования теорем о неполноте.

Первая волна имела место непосредственно после публикации Гёделем его статьи. Здесь Гёдель выступает, прежде всего, как математик, работающий над проблемой разрешимости суждений в рамках формальных систем (принимая за основу систему «Начал Математики» Рассела). Следствия этих теорем имели серьёзное влияние на развитие современной логики и метаматематики, вплоть до того, что полнота и непротиворечивость по Гёделю стали критерием для оценки формальных систем. Доказательства Гёделя были приняты научным сообществом в систему логико-методологического аппарата науки и достаточно длительное время воспринимались как нечто уже единожды определённое и достаточно раскрытое. Теоремы о неполноте вошли в учебники по математической логике таких видных представителей этого направления как Клини, Мендельсон, Колмогоров.Также среди исследователей, которых можно выделить в рамках этой волны, следует назвать Феффермана, Смаллиана, Нагеля, и др. Возможно, в связи с тем, что данные результаты ограничивают возможность полной формализации математики, некоторые исследователи приняли это на счёт любой дедуктивной системы – ведь математика всегда являла собой пример абсолютного, чистого, точного знания, своего рода образец науки в чистом виде.

Вторая волна обсуждений теорем поднялась на фоне развития компьютерных наук, а именно науки искусственного интеллекта. В 60х годах XX века была инициирована дискуссия на предмет того, являются ли ограничивающие теоремы Гёделя аргументами невозможности создания искусственного интеллекта (ИИ). Статья Лукаса [6] подняла вопрос о возможности компьютеризации человеческого сознания. На этом этапе появилась тенденция к философскому осмыслению результатов, полученных Гёделем. На передний план вышел вопрос о действительности этих теорем для человеческого сознания и мышления. Суть вопроса состояла в том, возможно ли создать искусстенный интеллект, который мог бы полностью воспроизвести процесс человеческого мышления. Исследователи разделились на две лагеря – менталистов и механицистов. Первые утверждали невозможность создания такого ИИ, аргументируя это превосходством человеческого разума над машиной Тьюринга, которая в состоянии работать только с перечислимыми множествами (а теорема Гёделя как раз утверждает неперечислимость всех теорем достаточно богатых теорий).

Вторые же придерживались обратной точки зрения, при этом используя две различные линии аргументации – либо утверждая, что результаты Гёделя накладывают в точности такие же ограничения на человеческое мышление и познавательные способности, либо отмечая несущественность результатов Гёделя для практической работы над ИИ. В связи с этой дискуссией возник термин «гёделевский аргумент», которым подкреплялась невозможность создания ИИ. К этой дискуссии присоединилось немало логиков, философов, математиков, физиков, и даже теологов. Среди авторов, принимавших участие в дискуссии, помимо Лукаса следует выделить Пенроуза, Минского, Хофштадтера и др. Возможно, само возникновение этой дискуссии было подстёгнуто публикаций ранее не печатавшихся работ Гёделя, относящихся к философии математики (мнение самого Гёделя по обсуждаемому вопросу позволяло причислить его к лагерю менталистов), в которых в том числе поднимался вопрос взаимосвязи математики и мышления. Г. Крайзель в работе «Биография Курта Гёделя» приводит следующее его высказывание: «Либо наш разум не является механическим, либо математика, даже арифметика, не является нашей собственной конструкцией» [7, с. 125]. Данное, и ему подобные высказывания, по-видимому, и привели к тенденции интерпретировать теоремы о неполноте, как накладывающие некоторое ограничение на «чистый разум», на логическое мышление и возможности человеческого познания. Сам по себе вопрос о применении математических результатов к изучению сознания более чем спорный. Однако подобные интерпретации теорем получили широкое распространение, и, к сожалению, были популяризованы в околонаучных и «интеллектуальных» кругах.

Третья волна интереса, которая поднялась в начале 90х годов XX в. и длится до сих пор, с одной стороны, характеризуется повышением внимания к философским взглядам Гёделя, с другой – тенденцией к пересмотру значимости и применимости данных теорем. К авторам, поддерживающим первую тенденцию, можно отнести В.В. Целищева и Хао Вана, к сторонникам пересмотра гёделевского наследия следует отнести Я. Хинтикку. Примечательно, что общей направленностью третьей волны можно назвать стремление прояснить всё нагромождение интерпретаций данных теорем, обнаружить их истоки и, как минимум, разделить философскую, логическую и математическую компоненты взглядов Гёделя, которые до сих пор зачастую смешивались, превращаясь в странную химеру.

Среди причин, приводящих к подобному смешению, порождающему весьма спорные теории, следует выделить недостаточно ясное понимание того, что же всё-таки показал Гёдель в своих работа. Отчасти, к сожалению, ответственность за это лежит и на самом Гёделе. Подобное непонимание ведёт к тому, что часто проходят незамеченными следующие ключевые особенности данных теорем.

1. Предметом, основанием и целью доказательства являются свойства натуральных чисел. То есть, в доказательстве говорится о свойствах натуральных чисел, доказательство строится на особенностях свойств натуральных чисел (таких, как рекурсивность и возможность использовать числа в качестве кодирующих символов, получая в итоге также число со свойствами натурального числа), а результатом доказательства является обнаружение определённого свойства натуральных чисел.

2. Подобное неразрешимое суждение существует в формальной системе если и только если в данную систему возможно погрузить простую арифметику. То есть, данная теорема имеет силу только для тех дедуктивных систем, которые включают в себя аксиоматику теории чисел, или в которых её возможно сформулировать. Так как натуральные числа – достаточно элементарная и легко выразимая формальная система, подобных систем будет немало, однако (см. пункт 1), – неразрешимое суждение будет всё ещё суждением о натуральных числах. Это, безусловно, весьма интересные следствия для попыток формализации математики, для философии математики и для теории чисел. Однако, по большому счёту, это не представляет критической важности для логики вообще (или даже для формальных систем вообще).

3. Так как речь идёт о натуральных числах, можно заключить, что в результатах Гёделя речь идёт не столько о вычислимости, сколько о перечислимости теорем какой-либо формальной системы. По факту, присвоение

гёделевского номера каждой формуле одним из последствий имеет формирование определённого перечислимого списка формул, и главным вопросом является – будут ли все формулы, перечисленные подобным образом, доказуемы, и возможно ли вообще данное перечисление.

Итак, можно сделать следующие выводы. Первая теорема Гёделя о неполноте и непротиворечивости формальных систем представляет собой достаточно важный результат о границах формализации математики и свойствах натуральных чисел. Однако она даже имплицитно не содержит следствий о принципиальной ограниченности дедуктивных систем. Тем более, необоснованной экспликацией её результатов является философское заключение об ограниченности «чистого (логического) разума» и невозможности создания какой-либо достаточно адекватной логики для познания действительности. Кроме того, требует прояснения сам метод доказательства, необходимость использования в нём суждения, сходного с парадоксом лжеца, а также наличие в реальности того самого «гёделевского суждения». Таково проблемное поле, открытое для дальнейших исследований.

Список литературы

1. Gödel, K. Über Formal Unentscheidbare Sätzeder Principia Mathematica und Verwandter Systeme, I. and On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I / Kurt Gödel // Kurt Gödel Collected works (Volume I. Publications 1929-1936) / Ed. by S. Feferman. – New-York: Oxford University Press, 1986. – P. 144-195.
2. Целищев В.В. Рационалистический оптимизм и философия Курта Гёделя/ В.В. Целищев // Вопросы философии. – 2013. – №8. – С. 12-23.
3. Философская энциклопедия. В 5 т. Т. 4. / Гл. ред. Ф. В. Константинов. – М.: «Советская Энциклопедия», 1967. – 592 с.
4. Гильберт Д. Основы теоретической логики /Д. Гильберт, В. Аккерман. – М.: Государственное издание иностранной литературы, 1947. – 306 с.
5. Успенский В.Л. Теорема Гёделя о неполноте / В.Л. Успенский. – М.: Наука, 1982. – 110 с.
6. Lucas J.R. Minds, Machines and Gödel / John R. Lucas // Philosophy. – 1961. – vol. 36. – P. 112-127.
7. Крайзель Г. Биография Курта Геделя / Г. Крайзель. – М., 2003. – 114 с.

Shkorubskaya E.G. The Problem Area of Gödel's Incompleteness Theorems// Scientific Notes of Crimea Federal V.I. Vernadsky University. Philosophy. Political sciences. Culturology. – 2015. – Vol. 1 (67). – № 2. – P. 189-197.

The article is devoted to the Gödel's incompleteness theorems. The purpose of the article is to give the survey of problem area that involved in the results obtained by Gödel about incompleteness of elementary arithmetic and systems in which it can be expressible. Much attention is given to the functional and deductive aspects of the concept of completeness of a formal system, in a general sense and in the sense of Gödel. It is spoken in detail about the similarities and differences of Gödel's proposition with the liar paradox. Necessity for using the liar paradox for proving incompleteness of the formal system is putted into the question. The article gives an analysis of interpretations of logical-mathematical and philosophical legacy of Gödel. It draws our attention to the phenomenon of recurrent interest to the works of Gödel in an academic community, presented in the form of the "three waves". The possible sources of a permanent returning to the incompleteness theorems results are discussed. Attempts are made to analyze the problem of superfluous and unreasonable interpretations and explications of incompleteness theorems in the fields of knowledge, not directly related to mathematical logic and the logic at all. The assumption that the consequences of these theorems for the philosophy and methodology of science is strictly limited is putted forward.

Key words:completeness, consistency, formal system, Kurt Gödel

References

1. Gödel, K. Über Formal Unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und Verwandter Systeme, I. and On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I / Kurt Gödel // Kurt Gödel Collected works (Volume I. Publications 1929-1936) / Ed. by S. Feferman. New-York: Oxford University Press, 1986. P. 144-195.
2. Tselischev V.V. Rationalistic Optimism and Philosophy of Kurt Gödel / V.V. Tselischev// Questions of philosophy. – 2013. – №8. – P. 12-23.
3. Philosophical Encyclopedia. In 5 v. V. 4. / Ed. by F. V. Konstantinov. – M.: «Soviet Encyclopedia», 1967. – 592 p.
4. HilbertD.Foundations of Theoretical Logic / D. Hilbert, W. Ackermann. – M.: State Publishing House of Foreign Literature, 1947. – 306 p.
5. Uspenskiy V.L. Gödel's Incompleteness Theorem / V.L.Uspenskiy. – M.: Science, 1982. – 100 p.
6. Lucas J.R. Minds, Machines and Gödel / John R. Lucas // Philosophy. – 1961. – vol. 36. – P. 112-127.
7. Krayzel G. Biography of Kurt Gödel / G.Krayzel. – M., 2003. – 114 p.