Ученые записки Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского
Философия. Политология. Культурология.Том 1 (67). 2015. № 1. С. 164–171.

УДК 165.23

ОБОБЩЕННЫЙ НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМ ЛОГИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ СТРУКТУР ЗНАЧЕНИЙ ОЦЕНКИ

Титов А.В.

В работе рассматривается возможность исследования динамики развития различных типов логического исчисления на основе исследования оценки, анализируется связь этого подхода с тезисом о внутреннем саморазвитии понятия, выдвинутым Гегелем в «Науке логики», и возможность его применения к развитию математики и математической логики. Приводятся примеры, позволяющие показать, что в развитии математики стихийно этот метод уже используется как диалектика внешней рефлексии.

Подход на основе исследования оценки позволяет рассмотреть с единой позиции вариантивное развитие логических исчислений как диалектический процесс, в котором возникновение различных вариантов логических исчислений рассматривается как результат разделения алгебраических структур, элементы которых служат значениями оценок формул логического исчисления.

При этом в центре внимания оказывается как отношение между формой логического исчисления и типом структуры оценки, а также отношением эквивалентности, определяющим меру на структуре оценки, так и отношение между различными языками теории структур.

Ключевые слова: *диалектика, формальная логика, оценка, семантика, математическая структура, мера, алгебраическая структура.*

Объектом исследования является формальная логика в ее классической и неклассических формах. **Целью** работы является поиск методологии, позволяющей с общей позиции рассмотреть соотношение между различными видами логики и проследить динамику их развития как диалектический процесс.

На развитие современной формальной логики оказывает значительное влияние развитие математического знания. Идея Лейбница о возможности сведения рассуждений к вычислению нашла свою реализацию в математической логике. Однако и современная логика не свободна от проблем традиционной логики. В частности, предметом дискуссий являются законы логики или, переходя на язык математической логики, тавтологии логического исчисления. Система законов классической логики подвергалась критике как со стороны диалектики, так и со стороны формальной логики. Результатом критического анализа законов логики стали системы, в которых не действуют законы исключенного третьего и противоречия. Однако формирование таких неклассических логик не имеет систематического характера: связи между ними проследить не всегда легко, а порой и невозможно, особенно если построения носят синтаксический характер. В случае, когда объектом исследования являются типы исчислений в математической логике, объединяющим моментом может служить понятие оценки, значение которой в математической логике играет роль истинности для формул алгебры логики.

В «Науке логики» Гегель следующим образом определяет свою задачу, подчеркивая новизну предлагаемого подхода к разработке логики: «Изображение царства мысли философски, т.е. в его собственной имманентной деятельности, или, что тоже самое, в его необходимом развитии, должно было поэтому явиться новым предприятием, и притом начинающем все сначала» [1, с.22].

В равной мере и чистая математика (А.Ф.Лосев делит математику на чистую математику и математику естествознания), а вслед за ней и математическая логика, как понятие есть результат работы мысли, а значит, и она имеет свое необходимое развитие, проследить которое и есть задача математиков, точнее, «проследить» раскрытие понятия «математика» в его необходимом развитии.

В математической логике, как следует и из ее названия, используется язык математики или языки, используемые и разрабатываемые в математике, в частности, языки, на которых описываются математические структуры. Понятие оценки, о котором речь пойдет ниже, позволяет перейти от синтаксического подхода к рассмотрению различных вариантов исчислений формальной логики к семантическому, основанному на анализе структур, на которых принимает значение оценка, эквивалентностей и мер на этих структурах. При этом соотношение между различными типами исчисления определяется соотношением между структурами.

Наши мысли о тех или иных объектах, в том числе математических, проявляют себя в языке. Поэтому проблемы выразительных возможностей языка и понимания выступают на первый план. Будем полагать, что языковая явленность мысли есть ее модель.

Теория категорий в этом смысле является объектом, позволяющим проследить как развитие языка математических структур влияет на содержание основных понятий математики. Классическая математика в этом случае может играть роль предпосылки, и ее разделы должны найти свое место в новом образе математики, выраженном на категорном языке.

Относительно развития логики Гегель выразил следующим образом суть метода, который, по его мнению должен лежать в основании ее развития: «… раскрытие того, что единственно только и может быть истинным методом философской науки, составляет предмет самой логики, ибо метод есть осознание формы внутреннего самодвижения ее содержания» [1, с.42] .

Другими словами, в данном случае метод, используемый в науке логики, сам есть объект этой науки и раскрывается в ходе ее развития.

В полной мере это можно отнести и к математической логике, в которой развитие понятия «математическая структура» дает нам «инструмент» для исследования развития и взаимосвязи форм логического исчисления. И если это не слишком заметно при синтаксическом подходе к исследованию этих форм, при котором может возникнуть ощущение произвольности формирования неклассических типов исчислений, то семантический подход, выражением которого можно считать нестандартный анализ как метод, основанный на исследовании оценки, в полной мере отвечает приведенному положению.

Разработка нестандартного анализа в интерпретации Робинсона явилась первым шагом в направлении развития понятия истинности. Наряду с «обычной» истинностью появился новый вид истинности, открывающий, возможность введении новых типов этого понятия, к тому же, не только не отрицающих друг друга, но взаимно дополнительных.

В общем случае алгебра <Fm, o1,o2,o3,…,on> формул языка нулевого порядка L0 является свободной в классе R универсальных алгебр <A,o1,o2,o3,…,on,>, в которых операции с одинаковыми индексами имеют одинаковую размерность. Множество V0 всех пропозициональных переменных языка L0 является системой свободных образующих в Fm.

Таким образом, на алгебре формул как универсальной алгебре еще не задается никакая система аксиом, которой определяется ее превращение в тот или иной тип исчисления. Решение этого вопроса может осуществляться как на синтаксической, так и на семантической основе. В первом случае задается система аксиом теории, исходя из представлений о том, какой вид должны принимать истинные суждения (тавтологии) в данном типе исчисления. Во втором – система аксиом определяется на основе сохранения структур в оценке.

Однако и при «синтаксическом» подходе к истинности формулы алгебры логики требование, согласно которому истинность формулы F(A1, A2,…,An) зависит от истинности A1, A2, ,…,An, т.е., оценка как отображение сохраняет структуру алгебры формул. При синтаксическом подходе последнее требование есть, скорее, пожелание, но при семантическом – является неизбежным требованием, сохраняющим операции при переходе к значениям оценки.

В общем случае оценка языка L0 есть отображение υ:Fm V0 →A, где A алгебра подобна алгебре <Fm, o1,o2,o3,…,on>. При этом отображение υ есть гомоморфизм множества формул в алгебру, элементы которой служат значениями оценки.

В нестандартном анализе в первоначальном виде оценка рассматривается как отображение вида: Fm→P(I), где P(I) –множество всех подмножеств некоторого фиксированного (индексного) множества I. Множество всех подмножеств, как известно, является булевой алгеброй или булевой решеткой. В работе [см.: 2, с. 100-101] это определение обобщается до отображения на решетку:

«Оцениванием (оценкой) в данном языке для фиксированной решетки X называется сопоставление каждой формуле ϕ элемента из X, обозначаемого ‖ϕk‖X или короче‖ϕk‖, причем логические связки языка моделируются операциями в решетке X.»

При этом X рассматривается как импликативная решетка общего вида. Уже в этом случае, анализируя разные типы оценок, мы можем проследить то, как количественные изменения и сопоставляемая им мера определяют качественный тип логики, зафиксированный в системе аксиом логического исчисления.

В частности, в нестанданртном анализе рассматривается множество - степень KI, где K- структура, а формулы –суждения о свойствах данной структуры. Оценка принимает значения на P(I), выбор в качестве j ультрафильтра в P(I) позволяет заменить Trj (ϕk) (Trj(ϕk)≡‖ϕk‖∈j) [3, с.378]) «обычной» истинностью суждения ϕk о структуре KI. Поскольку для ультрапроизведений KI│j≡ KI│~j, имеем: ϕk│j([f1], [f2],…[fn])⇔([ϕk(f1, f2,…,fn)]∈j), где [fi]∈ KI│j. Как будет показано ниже, это фактор-множество содержит два элемента, что обеспечивает эквивалентность обеих семантик. Ситуация в нестандартном анализе определяет множество, на котором принимает значение оценка, а именно, истинность как мера на множестве индексов, не являющихся элементом ультрафильтра, является бесконечно малой величиной и, следовательно, результатов оценки формулы на этой совокупности индексов не достаточно для изменения в сторону понижения, если на оставшихся индексах она равна 1, и повышения, если она на них равна нулю.

Таким образом, если рассматривается оценка со значениями в P(I), т.е. оценка‖ϕk‖:ϕ →P(I), то при условии, что j ультрафильтр над P(I) получим оценку в ультрапроизведении P(I)│~j. В [4, с. 81-82] доказано, что, если фильтр j в псевдобулевой алгебре A максимален, то фактор-алгебра A│~j содержит два элемента, т.о., отношение эквивалентности ~j приводит к оценке на булевой алгебре P(I)│~j=B={0,1}. Это позволяет заменить Trj(ϕk)≡ (‖ϕk‖∈j) «обычной» истинностью суждения ϕk о структуре K. В то же время, этого нельзя сделать при Trj (ϕk)≡ (‖ϕk‖=1), т.е., в случае если в качестве j выбран единичный фильтр. С математической точки зрения это объясняется тем, что при выбранном отношении эквивалентности только оценка, равная I, дает значение истинности, равное 1. Кроме того, для любых оценок таких, что ‖ϕk‖⊂‖ϕk1‖ будет иметь место‖ϕk‖<‖ϕk1‖. С точки зрения приведенных выше рассуждений, это означает, что при таком выборе фильтра каждый элемент множества I обладает конечной мерой, и множество значений оценок эквивалентно мощности P(I).

В классическом нестандартном анализе оценка принимает значения на булевой решетке; как уже отмечалось, в работе [2, с.101] рассматривается оценка на произвольной импликативной решетке, и при этом рассматриваются операции на алгебре формул с единственным отрицанием. В то же время, на импликативной решетке общего вида заданы два типа дополнения [4, с.67].

В [5, с.89] приводится вариант логики с двумя типами отрицания. Это H-B логика, аксиомы которой состоят из формул вида :

1. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma)\to (\alpha\to \gamma))$
2. $\alpha\to \alpha \vee \beta$
3. $\beta\to \alpha \vee \beta$
4. $(\alpha \to\gamma) \to ((\beta\to \gamma) \to (\alpha \vee \beta\to \gamma))$
5. $\alpha \wedge \beta\to \alpha$
6. $\alpha \wedge \beta\to \beta$
7. $(\gamma\to\alpha) \to ((\gamma\to\beta) \to (\gamma\to\alpha\wedge \beta))$
8. $(\alpha \to (\beta\to \gamma)) \to (\alpha \wedge \beta \to \gamma)$

9. $(\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$
10. $\alpha \rightarrow (\beta \vee (\alpha \div \beta))$
11. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
12. $(\alpha \div \beta) \rightarrow \ulcorner(\alpha \rightarrow \beta)$
13. $((\alpha \div \beta) \div \gamma) \rightarrow (\alpha \div \beta \vee \gamma)$
14. $\neg(\alpha \div \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
15. $(\alpha \rightarrow (\gamma \div \gamma)) \rightarrow \neg\alpha$
16. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow (\gamma \div \gamma))$
17. $((\gamma \rightarrow \gamma) \div \alpha) \rightarrow \ulcorner\alpha$
18. $\ulcorner\alpha \rightarrow ((\gamma \rightarrow \gamma) \div \alpha)$

В работе [6, с. 388-390] показано, что аксиомы этого исчисления полностью соответствуют утверждениям о свойствах импликативной решетки общего типа и при условии сохранения оценкой структуры индуцированы оценкой на такой решетке. Следует также заметить, что в математической логике, во всех вариантах исчислений, речь идет об оценке на некоторой структуре, а не об истинности. Хотя этот термин и применяется, здесь вообще не поднимается вопрос о том, что такое истина и истинность, и соотношение этих понятий требует отдельной проработки.

В описанном подходе рассматривались отображения алгебры формул на алгебру значений оценки, являющиеся гомоморфизмами. Обобщением этого подхода на случай алгебры оценок с дополнительной структурой может служить подход, основанный на использовании теоретико-категорного представления. В частности, к категорному описанию приходят в обобщенном нестандартном анализе, которое «есть алгебро-логический метод, основанный на рассмотрении оценок и в основном применяемый для изучения объектов, представимых в виде глобальных элементов некоторого пучка» [3, с. 377].

Использование категорного языка в математике и математической логике позволяет в терминах гегелевской диалектики снимать определения математических понятий и переходить к новым, расширяющим «снятые». Математика, как и всякая наука Нового времени, ориентируется на методы, диктуемые рефлектирующим рассудком. Т.е., оперирует абстрактными определениями, которые разделяют между собой определяемые предметы. Однако математика же и преодолевает это рассудочное разделение. И первый пример тому – история с 5-м постулатом. Мучительный отказ от него привел и к разделению геометрий, и к их обобщению в абстрактной системе без 5-го постулата. Т.о., в математике возможно единство различного в аксиоматике более высокого уровня абстракции. Это, конечно, не является примером спекулятивного мышления, внутренней диалектики, в которой объект отрицает сам себя, но дает примет того, что у Гегеля обозначено как диалектика внешней рефлексии. Однако в «Воображаемой логике» Васильева можно найти и примеры того, как происходит отрицание постулатов формальной логики (законы противоречия и исключенного третьего), исходя из их внутреннего содержания, т.е., из них самих, что уже можно отнести к примерам спекулятивного или разумного мышления, для которого противоречие есть «возвышение разума над ограниченностью рассудка и устранение ее» [1, с. 36].

Также и в математической логике, отрицая формы истинности как оценки определенного вида, на определенной структуре, и переходя к оценкам на структурах иного порядка, их единство мы можем искать в структурах более высокого порядка иерархии, более бедных формальным содержанием, дальнейшее раскрытие которого и дает разнообразие оценок. И категории здесь могут служить базой в силу «бедности» определяющего их содержания. Это та простая форма, все содержание которой должно раскрыться в ходе дальнейших определений.

Нестандартный анализ является примером не только действия разделения рефлексии, но и примером разрешения противоречия в новое единство, т.е. примером разумного хода. При непосредственном восприятии истинности того или иного утверждения объект, в данном математический, рассматривается в целом. В частности, пусть речь идет о сравнении функций f(x) и g(x). Возможны четыре вида отношения между ними: $f(x)< g(x)$, $f(x)>g(x)$, $f(x)=g(x)$, f(x) и g(x) несравнимы. При этом, для каждого конкретного x выполняется одно из первых трех отношений, четвертая же возможность означает, что в разных точках выполняются разные отношения, а каждое и приведенных отношений между функциями считается выполненным, лишь если оно выполнено для всех x. Таким образом, сравнение таких объектов как функций отождествляется со сравнением таких объектов как значений функции в точке, причем отношение выполнено, если выполнена тождественная ситуация, заключающаяся в том, что оно выполнено для каждого нового объекта – значения функции в точке x. В этом, собственно, и заключается то, что Гегель обозначил как выход за пределы непосредственного, определение и разделение его. В то же время, переход к рассмотрению значений функций в точке позволяет говорить о локальной истинности одного из отношений или о их истинности в определенных областях области определения функции. Разделение рефлексии здесь заключается в том, что разделяются истинные и неистинные высказывания относительно выполнения отношения, причем оно выполнено, если это отношение выполнено для значений во всех точках области определения. В нестандартном анализе рассматривается случай, когда невыполнение отношения на области меры 0 не влияет на результат, утверждение об истинности отношения остается в силе – это пример того, как объединяются утверждения первоначально противоречивые. Но, как отмечает Гегель, необходимо выходить за пределы разделяющих определений и соотносить их, в результате чего выявляется их столкновение. Спекулятивность проявляется здесь в том, что полярности отношение истинно/отношение ложно, первоначально рассматриваемые изолированно, взаимодействуют, и теперь истинность есть результат этого взаимодействия (становления), правда, пока в ограниченной форме, поскольку влияние одного из полюсов считается ничтожным. Развитие этого принципа должно привести к множественности мер истинности, т.е., к тому, что называется нечетким множеством.

Примером того, как категорный язык позволяет снимать старые определения и и тем самым выводить их за рамки привычных представлений, может служить, в частности, определение мономорфной стрелки (как, впрочем, и практически все определения в теории категорий). Мономорфная стрелка в теории категорий – это стрелка a→b, «сократимая слева», т.е. if $f \circ g = f \circ h$ то $g=h$.

В теории множеств этому соответствует инъективное отображение. Но это понятие охватывает также отношение порядка, которое представляется стрелкой a→b, если a<b (т.е.отношение в языке теории структур заменяется стрелкой в языке теории категорий), и операции, например, над натуральными числами: $m+n=m+p \Rightarrow n=p$. Здесь натуральное число на языке теории категорий есть стрелка, а композиция – операция сложения чисел.

Уже из этих примеров видно, что понятие стрелки в теории категорий охватывает такие понятия, как отображение в теории множеств (и не только), отношения, числа, а более широко – элемента алгебраической структуры и, вероятно, многое другое, что еще не описано языками различных разделов математики. А если это так, то это позволяет надеяться на то, что потенциал теории категорий позволит расширить рамки моделирования до объектов и процессов, которые пока не могут моделироваться с достаточной степенью адекватности на языках других разделов математики.

Список литературы

1. Гегель Г.В.Ф. Наука логики / Г.В.Ф Гегель. – СПб: «Наука», 1997. – 799 с.
2. Любецкий В.А. Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа / В.А. Любецкий // Успехи математических наук. – 1989. – Том 44. Выпуск 4(269). – с. 99 – 153.
3. Любецкий В.А. Некоторые применения теории топосов к изучению алгебраических систем // П.Т.Джонсон. Теория топосов. – М.: «Наука», 1986. – с.376 – 430.
4. Рассева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики / Е.Рассева, Р.Сикорский. – М.: «Наука», 1972. – 591 с.
5. Васюков В.Л. Категорная логика /В.Л. Васюков. – М.: АНО Институт логики, 2005. – 194 с.
6. Титов А.В. Диалектика в развитии типов логических исчислений на основе структур значений оценки / А.В. Титов // Доказательство очевидность, достоверность и убедительность в математике. Труды Московского семиеара по философии математики / Под ред. В.А.Божанова, А.Н.Кричевца, В.А.Шапошникова. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. – 432с.

Titov A.V. Generalized Non-Standard Analysis and Study of the Forms of Logical Calculation on the Basis of Assessment of Value Structures // Scientific Notes of Crimea Federal V.I. Vernadsky University. Philosophy. Political science. Culturology. – 2015. – Vol. 1 (67). – № 1. – P. 164-171.

This paper considers the possibility of studying the dynamics of development of different types of logical calculi on the basis of the assessment study, analyze the connection of this approach with the thesis about internal self-development concepts put forward by Hegel in "Science of logic" and the possibility of its application to the development of mathematics and mathematical logic. The examples allow to show that in the development of mathematics spontaneously this method is already being used as the dialectics of external reflection.

An approach based on assessment study allows us to consider a unified position options for the logical calculus as a dialectical process in which the emergence of different variants of logical calculus is seen as the result of the division of algebraic structures whose elements are the values of the logical calculus formulas estimates. At the same time the focus is as the relation between the form of a logical calculus type of pricing structure as well as equivalence relation determining the measure on the evaluation of the structure and the relationship between the different languages of the theory of structures.

Keywords: dialectic formal logic, evaluation, semantics, the mathematical structure of the measure, the algebraic structure.

References

1. Hegel G.V.F. Wissenschaft der Logik / G.V.F. Hegel. – St. Petersburg: "Science", 1997. – 779 p.
2. Lubtskii V.A. Valuations and Sheaves. On Some questions of Non-Standard Analysis / Lubtskii. // UMN vol.44, issue 4(269),1989. – pp. 99 – 153.
3. Lubetskii V.A. Some Applications of the Topos Theiry to the Study of Algebraic Systems / V.A. Lubtskii. // P.T.Johnstone. Topos Theory. – M.: "Science", 1986. – pp. 376 – 430.
4. Rasiowa H., Sikorski R. The Mathematics of Metamathematics – M.: "Science", 1972., – 591 p.
5. Vasyukov V.L. Categorial Logic / V.L. Vasyukov – M.: ANO Institute of Logic, 2005. – 194 p.
6. Titov A.V. Dialectics in the Development of Logical Calculi / A.V. Titov. // Proof . Moscow Studies in the Philosophy of Mathematics. – M.: URSS, 2014. – pp. 375 – 399.