Ученые записки Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского
Философия. Политология. Культурология. Том 1 (67). 2015. № 2. С. 173–180.

УДК 168

К РАЗЛИЧИЮ КЛЮЧЕВЫХ ЕДИНИЦ ЕСТЕСТВЕННОГО ЯЗЫКА И ЯЗЫКА МАТЕМАТИКИ

Сафонова Н. В.

В работе рассматриваются особенности языка математики. Обращается внимание, что ключевые единицы естественного языка (понятие) и языка математики (число) имеют различную природу.
Для выяснения специфических свойств ключевой единицы языка математики анализируется три способа введения числа (логицизм, формализм, конструктивизм). В результате исследования автор приходит к выводу, что основополагающим специфическим свойством числа является не его связь с эмпирической базой, а правила преобразования или правила игры. С этой точки зрения, природа математических объектов, а также выяснение денотата числа для его определения не играет особой роли.
Ключевые слова: *естественный язык, язык классической математики, натуральное число, логицизм, формализм, конструктивизм, аксиоматический метод, правила игры в математике.*

В предыдущей работе [1] был исследован вопрос об отличиях ключевых единиц естественного и математического языка. Были обоснованы следующие результаты: основная форма искусственного языка классической математики – это число и оно не обладает денотатом.

Возникает вопрос: каковы основные свойства числа как ключевой единицы языка классической математики и, если число не обладает денотатом, то должны быть, непременно, особенности, компенсирующие это отсутствие.

Цель данной работы: обнаружить свойства ключевой формы искусственного языка математики – числа. Для этого воспользуемся генетическим методом исследования, а именно: проследим, как в современных строгих математических теориях вводится и обосновывается натуральное число.

В истории математики XIX - XX веков складывается традиція – изложение математических теорий начинать с введения и обоснования натурального числа. На сегодняшний день существует несколько способов задания числа. Наиболее фундаментальные из них, затрагивающие вопрос о природе числа, – это: построение натурального числа по Фреге (логистическое), конструктивное построение натурального числа, а также построение натурального числа на базе аксиом Пеано. Для реализации поставленной цели познакомимся с каждым из них.

Господствующие положение на сегодняшний день занимает построение натурального числа с помощью аксиом Джузеппе Пеано. Именно на этой аксиоматической базе определяют действительные числа, являющиеся основой всей математики. Приведем ее с небольшими изменениями автора [2, с. 8-9].

«Первоначальные понятия: нуль (0) и число, следующее ЗА; число, следующее за числом *а*, обозначается через *а*′.

Аксиомы:

(1) Нуль есть число, не следующее ни за каким числом.

(2) Если число *а*′ равно числу *в*′, то и число *а* равно числу *в*.

(3) Если число нуль обладает некоторым свойством *P* и для любого числа *a* из того, что *a* обладает свойством *P*, следует, что и число *a*′ обладает свойством *P*, то всякое число *n* обладает свойством *P*» [2, с. 8 - 9]. «Последнюю аксиому Пеано, аксиому (3), часто называют аксиомой индукции» [2, с. 9].

В XX веке было обнаружено, что одной из особенностей аксиоматического метода является необходимость неопределяемых понятий. М. Клайн в [3, с. 221] пишет: «Хотя Аристотель в «Органоне», Паскаль в «Трактате о геометрическом духе» и Лейбниц в «Монадологии» подчеркивали необходимость неопределяемых понятий, математики по непонятным причинам прошли мимо этих предупреждений и продолжали давать определения, не имевшие смысла». Еще ранее ту же особенность замечает Платон: «Те, кто занимаются геометрией, счетом и тому подобным, предполагают в любом своем исследовании, будто им известно, что такое чет и нечет, фигуры и три вида углов и прочее в том же роде. Это они принимают за исходные положения и не считают нужным отдавать в них отчет ни себе, ни другим, словно это всякому и без того ясно. Исходя из этих положений, они разбирают уже все остальное и последовательно доводят до конца то, что было предметом их рассмотрения» [4, с. 318 (510 c–e)]. И только в XX веке математиками были получены результаты, подтверждающие предупреждения и выводы философов. Такие следствия можно сделать из теоремы Геделя о неполноте, но есть и более категоричные результаты.

В 1915 г. Леопольд Лёвингейм доказал теорему, а в 1920 г. Торальф Сколем обобщил этот результат. Следствия из теоремы Лёвингейма – Сколема оказались парадоксальными. Приведем теорему Лёвингейма – Сколема в новой формулировке: «если конечное или счетное множество T предложений языка L имеет модель M, то существует и счетная модель M*» [5, с. 365]. Поясним содержание данной теоремы. В качестве T мы имеем право рассматривать множество аксиом, описывающих некоторую модель M математической теории. Неявным образом предполагается, что выбор аксиоматики T обеспечивает единственность этой модели. Существование же помимо модели M еще и другой счетной модели M*, приводящей к парадоксу Сколема, свидетельствует о том, что аксиоматическое описание T было неполным и неоднозначным. Теорема Лёвингейма – Сколема говорит о том, что это не случайно, и что «*полное описание* *языковыми средствами математики системы М – несбыточная, принципиально неосуществимая мечта»* [там же, с. 365]. (Выделено курсивом мною. - Н. С.).

Не только данный результат, но и многие другие соображения привели математиков XX века к выводу о необходимости неопределяемых понятий в аксиоматических теориях. Большая часть научных интересов корифея математики XX века – Д. Гильберта была посвящена исследованию особенностей аксиоматического метода. Он пытался исследовать и построить предельно общую аксиоматику, из фундамента которой можно было бы получать любые другие математики, а в дальнейшем и всю науку в целом. Отсутствие денотата у объектов математики, по мнению Гильберта, было не случайным побочным эффектом, а принципиальной позицией. Достаточно расхожим выражением стало приписывание отцу математики XX века следующей фразы: «хотя мы используем такие слова, как точка, прямая, плоскость и т. д., вполне можно было бы говорить о пивных кружках, стульях и любых других предметах, лишь бы они удовлетворяли аксиомам» [3, с. 221]. Эта позиция позволяла неограниченно расширить область применения аксиоматического метода, что соответствовало реализации идеи Гильберта вывести из математики все остальные науки. Установление связи с эмпирической базой таких предметов, как арифметика и геометрия ученый считал случайным, не нужным и не имеющим значения.

Возникает вопрос: если денотат объектов математики, заданных аксиоматическим способом, не имеет значения, то, что же определяют аксиомы? По-мнению многих современных исследователей математики, эта наука устанавливает отношения между объектами. В. В. Мадер, анализируя данную проблему, приходит к выводу: «Природа математических объектов – это всего лишь те роли, которые они исполняют в объемлющей, аксиоматически заданной системе. Получается, что при аксиоматическом подходе «наличное бытие» индивидуальных предметов оказывается чем-то неуловимым, не поддающимся ни описанию, ни определению. Вследствие этого сама аксиоматическая система приобретает видимость своеобразной игры с символами» [5, с. 411- 412]. Так, аксиома геометрии о том, что через две точки можно провести прямую и только одну, определяет не точку и прямую, а устанавливает правила взаимоотношения между точкой и прямой. Попытки дать определения базовым понятиям геометрии осуществлял Евклид, однако они затрагивают проблему порочного круга. Можно сделать вывод, что вышеуказанные аксиомы (1-3) для натуральных чисел не объясняют нам вводимые объекты, а устанавливают правила игры преобразования чисел и формирования их в натуральный ряд.

Обращаясь к исследованию сущности числа с точки зрения логицизма, мы сталкиваемся со следующей дилеммой. Многие исследователи считают, что автор логицизма (выведение математики из логики). Готлоб Фреге имел платонистские взгляды на природу числа, («логика Фреге определенно была платонистской» [6, с. 40] – указывает Х. Б. Карри, хотя сам Фреге однозначно по этому вопросу не высказывался). При этом само выведение математики из логики им осуществлялось аксиоматическим методом.

Следует отметить, в начале XX века платонизм (в философии математики) был специфическим, но распространенным взглядом на природу математических объектов. Данной проблематике посвящено много работ. Из последних заслуживает внимание исследование Целищева В. В. [7], где, в частности, платонизм получает следующую характеристику: «Математические объекты существуют вне и независимо от человеческого сознания, являются вневременными и внепространственными сущностями, принадлежащими сфере внечувственной реальности» [7, с. 493].

Несмотря на сложившееся противоречие (платонистские взгляды Фреге и применение аксиоматического метода), анализ выведения числа позволяет получить однозначный ответ: у фрегевских чисел нет денотата, аксиомы задают процесс преобразования.

Данный вывод следует из следующих соображений. Фреге, дает определение числа: «понятие числа (именно в фрегевском толковании) формулируется совсем просто: b – число, если «оно достижимо индукцией, начиная с 0» [5, с. 294]. Далее «Фреге определил численность как пробег значений некоторой функции. При этом пробеги значений рассматриваемых функций имеют значение, так как Фреге это проверил, когда он доказал семантическую замкнутость системы» [там же, с. 296].

Несмотря на то, что природа натуральных чисел, введенных конструктивным способом, принципиально различна, их свойства, обнаруживаемые при анализе построения, остаются прежними. Это видно из характеристики, которую дает Р. Л. Гудстейн: «Что делает некоторую шахматную фигуру королем? Ясно, что это не очертания фигуры и не ее размер, ибо и то и другое может быть по желанию изменено. То, что делает фигуру королем, – ее ходы. …числа один, два, три и т. д. являются действующими лицами в игре арифметика, фигуры, которые исполняют их роли, являются цифрами, а то, что делает некоторый знак цифрой, соответствующей некоторому числу, – эта та роль, которую она играет, или, как можно сказать словами, более подходящими к контексту, – это правила преобразования данного знака» [8, с. 88].

На этом Гудстейн заканчивает разъяснение природы натурального числа. О том, что такое разъяснение не лишено недостатков, пишет Н. А. Шанин. «Никаких уточняющих пояснений о понимании им оборота речи «действующее лицо в игре арифметика» и других встречающихся в этой цитате оборотов речи Гудстейн не дает и ограничивается иллюстрацией на примере игры в шахматы» [9, с. 44].

Н. А. Шанин полагает, что следующее определение было бы более конкретным. «В теории рекурсивных арифметических функций удобно основываться на следующем определении: натуральными числами называются знак 0 и любое сочетание знаков, которое может быть построено в результата процесса, первый шаг которого состоит в написании знака 0 и каждый новый шаг (если он совершается) состоит в переходе от знакосочетания N, полученного в результате предшествующего шага, к знакосочетанию S(N). Таким образом, при этом соглашении натуральными числами называются знакосочетания 0, S(0), S(S0)), …» [там же, с. 52].

Сам Гудстейн строит свое натуральное число таким образом. Он дает «определение цифры», «определение счета», а затем «формализует счет».

1. Определение цифры. «Образование цифр может быть полностью охарактеризовано с помощью двух операций следующим образом. Мы расширяем алфавит введением нового знака «x» и образуем «слова», подставляя вместо «x» или «0», или «x+1»; например, мы можем по очереди образовать «x», «x+1», «x+1+1», «x+1+1+1», «0+1+1+1»; последнее из этих выражений является цифрой» [8, с. 89].

2. Определение счета. «Первый (этап счета) – тот, который мы будем называть «использование совокупности в качестве цифры», состоит в том, что игнорируются индивидуальные «черты характера» элементов данной совокупности, и они считаются все одинаковыми (но не тождественными) для нашей цели… например, буквы «a» на печатной странице имеют некоторые различия… но для целей чтения мы игнорируем эти различия и рассматриваем разные a как один и тот же знак… Второй этап процесса счета состоит в переходе от одного числового обозначения к другому по правилам «один и один – два», «два и один – три», «три и один – четыре» и т. д.» [там же, с. 91-92].

3. Формализация счета. «Счет можно формализовать в некоторой знаковой системе посредством формулирования правил преобразования для пересчитывающего оператора «N». Мы представляем объекты пересчитываемых совокупностей буквами a, b, c, …, а совокупности – посредством конъюнкций вида a & b, a & b & c, …; причем единичный объект рассматривается также как совокупность. Букву l мы используем в качестве переменной для объектов, т. е. как букву, вместо которой можно написать любой объект; прописная буква L служит для совокупностей и может быть в любом тексте заменена определенной совокупностью или выражением «L & l». Цифрами системы являются знаки (кроме x), получаемые из l, x и функции следования x+1 подстановкой. Далее мы определяем

N (l)=1,   N(L & l)= N(L)+1.

Эти равенства достаточны для определения числа членов любой совокупности. Например, подставляя «a» вместо знака переменной «l», во-первых, мы получаем N(a)=1, и во-вторых, подставляя затем «a» вместо «L» и «b» вместо «l» мы получаем

N(a & b)=N(a)+1,

и, значит,

N(a & b)=1+1.

Далее, подставляя «a & b» вместо «L» и «c» вместо «l», мы имеем

N(a & b & c)=N(a & b)+1= 1+1+1.

Мы видим, что N(L) определяется с помощью рекурсии… N(L) определяется только шаг за шагом путем введения членов пересчитываемого класса по одному (или отбрасывания по одному) на каждом шаге» [там же, с. 93-94].

Таким образом, в вопросах введения числа на конструктивной основе основополагающую роль играют преобразования, происходящие с числом, а не денотат числа. «Под «определением» понимают расшифровку смысла вновь вводимого термина, т.е. раскрытие содержания концепта этого термина. С помощью определений, таким образом, решаются две задачи: присвоение имени определяемому и расшифровка смысла этого имени. (Заметим сразу же, что расшифровка смысла имени может быть достигнута и путем построения его денотата.)» [5, с. 149]. В нашем случае то, что число имеет денотат, является несущественным. Хотя и нужно отметить, что конструктивная математика обладает эмпирической базой. Это отчетливо видно по определению натурального числа, которое дает Марков А. А. «Простым примером конструктивного процесса является построение ряда вертикальных черточек

||||||

путем писания одной такой черточки, приписывания к ней справа и слева ее копии – другой черточки, приписывания к полученным черточкам еще одной черточки, затем еще одной черточки, затем еще одной и еще одной. Результатом этого конструктивного процесса является конструктивный объект, изображенный шестью строками выше. Сам этот конструктивный объект представляет собой материальное тело, состоящее из бумаги и засохших чернил, а приведенный выше рисунок есть состоящая из бумаги и засохшей типографской краски копия этого конструктивного объекта. Она тоже есть конструктивный объект, поскольку изготовление копии можно считать конструктивным актом.

Ряды вертикальных черточек вроде нашего рисунка, включая и «пустой» ряд, в состав которого не входит ни одна черточка (его можно представить в виде чистого листа бумаги), мы будем называть натуральными числами. Веденные таким образом натуральные числа суть конструктивные объекты» [10, с. 23].

Таким образом, каждый из способов выведения числа имеет различные представления о природе числа, но анализируя способы введения числа, основополагающим является не их связь с эмпирической базой, а правила игры – способы преобразования. При этом каждый из этих способов предполагает общие правила игры, а именно: все они начинаются с введения нуля, затем идут преобразования: прибавления единицы, пошаговый процесс и т. д. Следовательно, основополагающей особенностью ключевой единицы математики (натурального числа) является не его связь с эмпирической базой, а общие правила преобразования, заданные как правила игры. Данный вывод косвенно подтверждает определенный факт, сложившийся в истории математики: конструктивная математика была создана в ответ на проблемы обоснования науки, однако, несмотря на ее непротиворечивость, ожидаемого результата не было (если бы это произошло, то конструктивная математика полностью вытеснила классическую).

Список литературы

1. Сафонова Н. В. Особенности языка классической математики // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского.Серия. «Философия. Культурология. Политология. Социология». - Симферополь : 2014. – Том 27 (66). № 3. С. 424– 429.
2. Генкин Л. О математической индукции. / Пер. с англ. М. Д. Гридленгера и Е. А. Гридленгер. - М.: Физматгиз, 1962. – 36с.
3. Клайн М. Математика. Утрата определенности / Клайн М. / Пер. с англ. Ю. А. Данилова. – М. : Мир, 1984. - 446 с.
4. Платон. Сочинения в трех томах. / Пер. с древнегреч., под общ. ред. А. Ф. Лосева и В. Ф. Асмуса. - М.: Мысль, 1971. - Т. 3 (1). – 687с.

5. Мадер В. В. Введение в методологию математики: (Гносеологический, методологический и мировоззренческий аспекты математики. Математика и теория познания). - М.: Интерпракс, 1994. – 447с.
6. Карри Х. Б. Основания математической логики. / Пер. с англ. В. В. Донченко. - М.: Мир, 1969. – 568с.
7. Целищев В. В. Математический платонизм В. В. Целищев / ΣΧΟΛΗ Vol. 8. 2 (2014) Томский государственный университет Институт философии и права СО РАН2014 www.nsu.ru/classics/schole/8/8-2-tsel.pdf
8. Гудстейн Р. Л. Рекурсивный математический анализ. / Пер. с англ. А. О. Слисенко. - М.: Наука, 1970. – 472с.
9. Шанин Н. А. О рекурсивном математическом анализе и исчислении арифметических равенств Р. Л. Гудстейна. // Р. Л. Гудстейн. Рекурсивный математический анализ. - М.: Наука, 1970. – С. 7-76.
10. Марков А. А., Нагорный Н. М. Теория алгорифмов. - М.: Наука, 1984. – 432с.

Safonova N.V. To Distngushing Key Units of Natural Mathematical Languages// Scientific Notes of Crimea Federal V.I. Vernadsky University. Philosophy. Political sciences. Culturology. – 2015. – Vol. 1 (67). – № 2. – P. 173-180.

Features of the language of mathematics are considered. It should be noted that the key unit of natural language (concept) and the language of mathematics (number) have a different nature.
Three ways of entering of the number (logicism, formalism, constructivism) are analyzed in order to identify the specific properties of the key language units of mathematics. Fundamental specific property is not its connection with empirical evidence, and rules of transformation or rules of the game. From this point of view, the nature of mathematical objects and figuring denotate of the number in order to determine his are not matter that much.
Keywords: natural language, the language of classical mathematics, natural number, logicism, formalism, constructivism, the axiomatic method, rules of the game in mathematics.

References

1. Safonova N. V. Features of the Language of Classical Mathematics. // Scientific notes of Taurida National University. Series "Philosophy. Culturology. Politology. Sociology". – Simferopol : 2014. – T. 27 (66). № 3.– P. 424-429.
2. Henkin L. On Mathematical Induction. / Trans. from English M. D. Gridlenger and E. A. Gridlenger. – M. Fizmatgiz, 1962. – 36 p.
3. Kline M. Mathematics. The loss of certainty / Trans. from English Y. A. Danilova. M. : Mir, 1984. – 446 p.
4. Plato. Compositions in Three Volumes. / Trans. from Ancient Greek., under the total. A. F. Losev and V. F. Asmus. – M. : Mysl, 1971. – T. 3 (1). – 687 p.
5. Mader V.V. Introduction to the Methodology of Mathematics: (epistemological, methodological and philosophical aspects of mathematics. Mathematics and the theory of knowledge). – M .: Interpraks, 1994. – 447 p.
6. Curry H. B. Foundations of Mathematical Logic. / Trans. from English V. V. Donchenko. M. : Mir, 1969. – 568 p.
7. Tselishev V.V. Mathematical Platonism / ΣΧΟΛΗ Vol. 8. 2 (2014). Tomsk State University Institute of philosophy and law SO RAN 2014. / [Electronic resource]. – Access mode: www.nsu.ru/classics/schole/8/8-2-tsel.pdf

8. Goodstein R. L. Recursive Mathematical Fnalysis. / Trans. from English. A. O. Slisenko. – M .: Nauka, 1970. – 472 p.
9. Shanin N. A. Recursive Mathematical Analysis and Calculus of Arithmetic Equations R. L. Goodstein // R. L. Goodstein. Recursive mathematical analysis. – M .: Nauka, 1970. – P. 7-76.
10. Markov A. A., Nagornyj N. M. Theory of Algorithms. – M .: Nauka, 1984. – 432 p.