Ученые записки Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского
Философия. Политология. Культурология.Том 1 (67). 2015. № 1. С. 148–155.

УДК 161.1

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ (ФУНКФОРАХ)

Николко В.Н.

В множестве логических функций вводятся классы функфорных функциональных связей, N-функфоры, среди которых имеют место принимаемые в качестве правильных в аристотелевской силлогистике формулы. Дается определение функфора как множества двузначных функций f (x1, x2,..., xn), аргументы которых x1, x2,..., xn принимают значения 0 или 1 и которые полностью определяются законом соответствия f. Формулируется принцип силлогистического следования. Обращается внимание на то обстоятельство, что среди N-функфоров находятся принимаемые (правильные) аристотелевские силлогизмы, существенно увеличивает исследовательский интерес к N-функфорам. Подчеркивается, в связи с этим, необходимость тщательного функфорного анализа аристотелевской силлогистики, состоящего в редакции общих утверждений силлогистики в контексте функфорной терминологии.
***Ключевые слова**: функция, логические функции, пропозициональные функции, функции алгебры логики, функфоры.*

Цель: предъявить класс функций, существенно расширяющий границы известных в настоящее время классов логических функций.

Новизна: предлагаемое обсуждение функфоров на уровне сущности осуществляется впервые.

Пусть имеется множество переменных, обозначаемых прописными буквами второй половины латинского алфавита с индексами или без них – x, y, z, t; x1, x2, ..., y1, y2, y3,..., u1, u2,..., определенных в множестве M. Связь двух или более переменных, в результате которой изменения одной или нескольких переменных, например, (x1, x2,…, xn), вызывает соответствующее изменение переменной например – u, по закону f, назовем функциональной связью и будем записывать ее в виде формулы u = f(x1, x2,..., xn). Переменную u в этом случае называют функцией от (x1, x2,..., xn) по закону (алгоритму) f; области изменений рассматривают как множество ее значения; а переменные x1, x2,...,xn считают аргументами функции u. К примеру, пусть (a1, a2,…, an) – пакет значений аргументов x1, x2,..., xn функции u, всякое ai ($1 \le i \le n$) принадлежит M, а u=f(x1, x2,..., xn). Тогда по закону f можно указать, найти, вычислить, в конце концов, для всякого пакета (a1, a2,..., aм) соответствующее значение u из некоторого множества M1, которое, конечно же, может совпадать и с M. Число аргументов функции (будем полагать, что среди аргументов не бывает одинаковых) – местность функции. Число значений функции – ее значность. В дальнейшем будем иметь дело с двузначными функциями.

Примем, что функция полностью определена, если обозначены ее местность, значность, указаны области ее изменений и области значений аргументов, а также предъявлен внятный алгоритм – f – соответствия наборов значений аргументов и значений функции. В нашем случае f будет матричной конструкцией, в левой части которой будут находиться столбцы значений аргументов, а крайне правом столбце – соответствующие значения функции. При этом каждая строчка будет состоять из пакета значений аргументов (левая часть) и соответствующего пакету значения функции (правая часть).

Логической будем называть функцию, если и только если областями значений ее аргументов и ее самой являются предметные единицы логики – имена, выражения, связки, предложения, суждения, высказывания и т.д. или характеристики этих единиц – например – истина (1), а закон f – предъявляется в виде матрицы. Широко известны так называемые «пропозициональные функции», представляющие собой предложные сообщения на любом (скажем, русском языке), в которых подлежащие, сказуемые или дополнительные члены предложения заменены переменными. Таковым является, например, высказывание «Все s суть p», где s, p – переменные – аргументы пропозициональной функции Asp, аргументы которой принимают значения общих имен. При подстановке в Asp (Все s суть p), вместо s и p общих имен из словаря русского языка выражения типа Все s суть p превращаются в обычные предложения, которые могут выполнять (тогда Все s суть p принимает значение истины (1)) или не выполнять эту функцию (принимать значение 0).

Среди логических функций широкое распространение получили функции алгебры логики, в частности, – функции Буля и классы функций Э. Поста.

Вполне корректное определение функции алгебры логики в русскоязычной литературе дано в книге Яблонского С.В., Гаврилова Г.П., Кудрявцева В.Б. «Функции алгебры логики и классы Поста» [1, с. 10]. Воспроизведем его полностью, без существенной редакции. Авторы исходят из некоторого счетного алфавита переменных u=[uν], ν=1, 2, 3…. В дальнейшем, во избежание употребления сложных индексов используются для обозначения букв этого алфавита мегасимволы x, y, z, t, u..., с индексами или без них. Функции алгебры логики составляют (по определению упомянутых авторов) «множество всех функций f (x1, x2,..., xn), переменные которых определены на множестве E2=[0,1] и таких, что f (a1, a2,..., an). ∈ E2, если ai (i=1, 2,..., n). При этом ∈ – знак «принадлежит». И далее отмечается: «Очевидно, что функция f(x1, x2,..., xn) полностью определена, если задана Таблица 1» [там же]. Приведем ее ниже:

Таблица 1

x1 x2...xn-1 xn	f (x1, x2, ..., xn-1, xn)
0 0 …0 0	f (0, 0, ..., 0, 0)
0 0 ... 0 1	f (0, 0, ..., 0, 1)
0 0 ... 1 0	f (0, 0, ..., 1, 0)
0 0 ... 1 1	f (0, 0, ..., 1, 1)

. . ..	. . . .
1 1 ... 1 1	f (1, 1, ..., 1, 1)

Нетрудно выделить особенности функций алгебры логики. Например, формулировка функций алгебры логики включает в себя Таблицу 1. Без нее функции алгебры логики не определены полностью. Тогда корректной выглядела бы следующая редакция определения функций алгебры логики: к функциям алгебры логики относятся все те двузначные функции f (x1, x2, ..., xn), аргументы которых принимают значение только 0 или 1, закон соответствия которых – f – определяется вышеуказанной Таблицей 1, согласно которой аргументы x1, x2,..., xn независимы друг от друга, а разные пакеты значений аргументов образуют матрицу из 2n строк и n разных столбцов. Коррекция определения функций алгебры логики допускает нетривиальные обобщения, в частности, – класс функций, названных нами функфорами.

Определение 1. Функфорами будем называть множество двузначных функций f (x1, x2,..., xn), аргументы которых x1, x2,..., xn принимают значения 0 или 1 и которые полностью определяются законом соответствия f, выражаемого таблицей 2.

Таблица 2

x1 x2 ...,xn-1, xn	f(x1, x2, ..., xn-1, xn)
A12 a12 ... a1n-1 a1n	f(a11, a12, ..., a1n-1, a1n)
a21 a22 ... a2n-1 a2n	f(a21, a22, ..., a2n-1, a2n)
a31 a32 ... a3n-1 a3n	f(a31, a32, ..., a3n-1, a3n)
. . ..	. . . .
ai1 ai1 ... ain-1 ain	f(ai1, ai2, ..., ain-1, ain)

При этом, число столбцов матрицы, представленной в таблице 2, – n+1, и все они разные (по определению), а число строк – меньше 2n+1. Последнее замечание – существенная строчка определения функфоров.

Нетрудно видеть, число одинаково местных функфоров конечно.

Среди функфоров находятся все булевы функции: 0, 1, x, x1, ┐x1 x2, x1 xn, x1→x2, x1~x2, x1-x2, x1|x2. Указанные булевы функции полностью определяются содержанием следующей таблицы 2.

x	0	1	x	┐x	x_2x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \sim x_2$	x_1+x_2	$x_1 \mid x_2$
0	0	1	0	1	0 0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0 1	0	1	1	0	1	1
					1 0	0	1	0	0	1	1
					1 1	1	1	1	1	0	0

Функции 0, 1 и x называются соответственно константой 0, константой 1 и функцией, тождественно равной x. Функция x называется отрицанием переменной x, x1 ∧ x2 – конъюнкцией, x1 ∨ x2 – дизъюнкцией x1 и x2, x1→x2 – импликацией x1 и x2, x1 ~ x2 – эквивалентностью x1 и x2, x1+x2 – суммой x1 и x2 по модулю 2, x1|x2 – функцией Шеффера (штрих Шеффера) от x1 и x2.

Нетрудно видеть: среди функфоров присутствуют все функции алгебры логики. Это следует из определения функций алгебры логики, воспроизведенного выше. Вместе с тем, существуют такие функфоры, которые не являются функциями алгебры логики. Например, двузначные двуместные функции f1 (x1, x2) и f2 (x1, x2), которые полностью определяются Таблицами 4 и 5.

Таблица 4

x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2)$
1	1	1
0	1	0
1	0	0

Таблица 5

x_1	x_2	$f_1(x_1, x_2)$
1	1	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0

Названий для функфоров, которые не являются функциями алгебры логики, нет. Но учитывая огромное значение таких функфоров, имеет смысл номинально их выделить, назвав, скажем, N-функфорами.

Среди функфоров находится множество аристотелевских силлогизмов. Это видно из нижеследующей редакции определения аристотелевских силлогизмов. Вообще говоря, к аристотелевским силлогизмам относят тройки функций типа Axy («Все x суть y»), или Esp («Все s не суть p»), или Igr («Некоторые r есть 2»), или 0mn («Некоторые m не суть n»), каждая пара которых имеет общий аргумент. При этом, значениями аргументов x, y, s, p, g, r, m, n выступают общие имена из словаря, скажем, русского языка.

Иными словами простейшими формулами аристотелевской силлогистики являются выражения, получаемые из операторов «Все … есть …», «Все … не есть …», «Некоторые … есть …», «Некоторые … не есть …» подстановкой в них вместо многоточий переменных x, y, s, p, r, m, n и т.д., определенных в множестве общих имен естественного языка.

Сложными формулами силлогистики – силлогизмами, в таком случае оказываются любые тройки введенных выше простейших формул, каждая пара которых имеет одну общую переменную, как, например, это есть в следующих формулах: Amp Asm Asp, Emp Asm Esp и т.д. Связь простейших формул в силлогизмах посредством общих переменных обеспечивает функциональную связь между левыми простейшими формулами и крайне правой простейшей формулой в силлогизмах, т.е. Asp= f1 (Amp, Asm) или Esp= f2 (Amp, Esm) и т.д.

В контексте функфорного подхода множество аристотелевских силлогизмов можно было бы определить как множество функций Z = f (X,Y), таких, что:

1. X,Y,Z из множества [Axy, Esp, Igr, Jmn и т.д.];
2. Каждая пара из X,Y,Z имеет общий аргумент (термин);
3. X,Y,Z принимают значения 0, 1;
4. Z полностью определяется Таблицей 6:

X	Y	Z = f (X,Y)
x_{11}	y_{11}	z_{11}
x_{12}	y_{12}	z_{12}
…….	……	…….
x_{i1}	y_{i2}	z_{i3}

При этом xij, yij, zij принимают значение 0 или 1, а (i, j=1, 2,…, n), n≤8.

Построим таблицу истинности хотя бы одного правильного силлогизма из списка персонально названных, например Barbara, или Amp Asm Asp. Подставляя вместо m, s, p отдельные конкретные имена из множества общих терминов в Amp Asm Asp получаем Таблицу 7

общие имена	Amp	Asm	Asp=f(AmpAps)
m - лошади s - камни p – животные	и	л	л
m - лошади s - животные p – камни	л	л	л
m - камни s - лошади p – животные	л	л	и
m - люди s - спортсмены p – смертные	и	л	и
m - смертные s -спортсмены p - люди	л	л	и
m - спортсмены s - люди p - смертные	и	л	и

Нетрудно видеть – других строчек истинности-ложности выражений Amp, Asm, Asp как частей правильного силлогизма под названием Barbara, при указанных выше условиях – нет.

При этом мы помним, что крайние справа выражения силлогизма – в нашем случае это Asp – являются выводами из первых двух слева стоящих выражений (в нашем случае Amp, Asm), т.к. Asp = f (Amp, Asm).

Других, отличных от случаев 1, 2, 3 в таблице истинности закона обращения Aab Iba – нет. Очевидно, Aab Iba функкфорное образование.

Доказывается следующая теорема 1.

Все правильные силлогизмы аристотелевской силлогистики из 24 стандартных силлогизмов, имеющих персональное историческое название (Barbara, Celarent и т.д.), являются N-функкфорами, т.е. имеют таблицу истинности-ложности такую же, как таблица 7.

В целях доказательства теоремы следует построить таблицы значимости упомянутых в условии теоремы силлогизмов. Однако, достаточно того, что таблицы, их (силлогизмы) определяющие, точно не будут иметь строчки 110 потому, что выбранные силлогизмы – правильные, а это означает, что крайне правое выражение силлогизма (вывод) необходимо истинно при истинности посылочных утверждений.

Теорема 2. Все формулы, принимаемые в аристотелевской силлогистике в качестве правильных, являются N-функкфорами. Теорема доказывается по принципу доказательства Теоремы 1: таблицы, их характеризующие, не имеют «плохую» строчку.

То обстоятельство, что среди N-функкфоров находятся принимаемые (правильные) аристотелевские силлогизмы, существенно увеличивает исследовательский интерес к N-функкфорам. Необходим тщательный функкфорный анализ аристотелевской силлогистики, состоящий в редакции общих утверждений силлогистики в контексте функкфорной терминологии. Речь идет о таких утверждениях как, например, - правила силлогизмов, средства аксиоматизации и т.д. Для этой цели необходимо в первую очередь исследовать свойства матриц (таблиц) N-функкфоров, состоящих из 0 и 1.

Определение 1. Матрицу, состоящую из 0 и 1 будем называть стандартной, если:

1) в ней нет одинаковых строк и столбцов

2) все столбцы имеют одинаковое количество мест. Это же относится и к строчкам

3) ни в столбцах (ни – соответственно, в строчках) нет «пустых» мест. Иными словами, стандартные матрицы – «квадратные» или «прямоугольные» таблицы из 0 и 1, без повторов строк и столбцов, а также без пустых мест.

Определение 2. Строчку стандартной матрицы, крайне правый член которой 0, а все остальные – 1, будем называть «плохой». Плохая строчка, к примеру, имеет вид 111110.

Определение 3. Строчку стандартной матрицы, которая сплошь состоит из 1, назовем «хорошей», например, строчка 11111 – хорошая.

Определение 4. Строчка стандартной матрицы, у которой крайне правый элемент – 0, а в левой части тоже есть хотя бы один 0 – «обычная». Например, 00110 – обычная.

Теорема 3. Если длина строчки стандартной матрицы n (содержит n элементов), то максимальное число различных строк этой матрицы 2n. Теорему легко проверить эмпирически – попробовать построить матрицу с 2n+1 разными строчками.

Определение 5. Матрицы с n-различными столбцами и с 2n разными строками будем называть особыми.

Например, матрица вида 11 – особая.

10

01

00

Особые матрицы – бывают 2 строчные, 4 строчные, 8 строчные, 10 строчные и т.д.

Определение 6. Два столбца a, b стандартной матрицы независимы друг от друга, если и только если при любом значении a значение b может быть как 0, так и 1.

Теорема 4. Особые матрицы имеют независимые столбцы. Независимость столбцов состоит в том, что изменение значения какого-либо столбца не сказывается на изменении других столбцов. Теорема очевидна.

В дальнейшем нас будут интересовать матрицы с выделенным крайне правым столбцом. Этот столбец будем называть выводом. Все прочие столбцы по отношению к выводному являются посылками.

Определение 7. Матрицу, в которой посылочные столбцы образуют особую матрицу, будем называть классической. Особую матрицу классической матрицы будем называть ее ядром.

Теорема 5. В классической матрице, число строк которой меньше 2n+1, где n – число разных столбцов ядра этой матрицы, выводной столбец является зависимым от прочих столбцов матрицы, точнее – является функцией прочих столбцов этой матрицы, или an+1= f (a1, a2, ..., an). Теорема интуитивно ясна и является развитием Определений 5 - 7. Выводной столбец, если не независим, то, значит, зависим, что нормально выражается в виде функции an+1=f(a1, a2, ..., an).

Определение 8. Будем говорить, что an+1 = f (a1, a2,..., ai-1, ai, ai+1, ..., an) существенно зависит от ai, если найдутся две строчки ядра матрицы a1 a2 a3...an , а именно:

┐a = (a11, a12, ..., a1i-1, 0, a1i+1, ..., a1n)

a = (a11, a12, …, a1i-1, 1, a1i+1, ..., a1n) такие, что f(a) ≠ f(┐a). Переменная ai называется существенной для функции f. Все переменные, от которых функция f(a2, a2n, ..., an) не зависит существенно, называются фиктивными. Число всех переменных, от которых функция f (x1, x2, ..., xn) зависит существенно называется порядком этой функции. Определение 8 (в некоторой редакции) взято из [1, с. 11].

В функциях, используемых в дальнейшем, будут указываться только переменные, от которых функции зависят существенно.

Определение 9. N-функфор f (x1, x2, ..., xn) = xn+1 назовем согласованным, если матрица, его определяющая, не содержит плохой строчки.

Определение 10. N-функфор f (x1, x2, ..., xn) = xn+1 назовем сильно согласованным, если матрица, его определяющая, содержит 2n+1-1 различных строк, причем отсутствует плохая строчка матрицы.

Нетрудно видеть, что принимаемые в аристотелевской силлогистике функции – сильно согласованы. Отсюда естественно утверждать принцип следования в силлогистике в следующей формулировке: формула Z аристотелевской силлогистики следует из формулы XY (где X, Y – простые формулы силлогистики), если и только если формула XYZ – сильно согласована. В некоторых случаях достаточно простой согласованности. Тогда можно говорить, что Z следует из (XY) и записывать этот факт в виде (XY)→Z, а читать как «Если XY, то Z».

Что бросается в глаза при сравнении функфорных образований, их систем, с одной стороны, и устоявшихся в математической логике образований – с другой? Как нам представляется – в случае функфорного построения формальных систем интересны согласованные или строго согласованные формулы. В случае же классических построений математической логики – отбор проходит по принципу тождественной истинности формул. Это маленькое формальное различие в принимаемости формул таит в себе, как представляется, потенциал развития современной логики.

Список литературы

1. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Г. Функции алгебры логики и классы Поста («Математическая логика и основания математики»). – М.: Наука, 1966. – 120 с.
2. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. – М.: Наука, 1972. – 288 с.
3. Яновская С.А. Лекции по алгебре логики / Сост., ред., коммент. Б.В. Бирюкова, З.А. Кузичевой. – М.: ЛЕНАНД, 2015. – 264 с.

Nikolko V.N. On a Logic Functions Set (Funcfors) // Scientific Notes of Crimea Federal V.I. Vernadsky University. Philosophy. Political science. Culturology. – 2015. – Vol. 1 (67). – № 1. – P. 148-155.

The set of functions called funcfors that significantly expands the boundaries of the currently known logic functions is presented. The discussion of such functions at the level if there essence is suggested for the first time. The funcfor functional connections classes called N-funcfors among which there are formulas accepted in the Aristotele's syllogistics are introduced into the set of logical functions. The principle for syllogistic implication is formulated. The following definition for funcfors is given: the elements of the set of binary functions f (x1,x2,...,xn) which arguments take value 0 or 1 and which are determined by the rule of correspondence f are called funcfors. This set includes logic algebra functions. The subset of N-funcfors is distinguished. The following theorem is proved: all the formulas accepted in Arictotle's syllogistics as correct are N-funcfors in the case of funcfor constructing of the formal systems.
Keywords: function, logical function, propositional function, logic algebra functions, funcfors.

References

1. Yablonskiy S.V., Gavrilov G.P., Kudryavtsev V.G. Logic Algebra Functions and Post's Sets (Mathematical Logic and Boundaries for Mathematics). – M.: Nauka, 1966. – 120 p.
2. Gindikin S.A. Logic Algebra in Exercises. – M.: Nauka, 1972. – 288 p.
3. Yanovskaya S. A. Lectures on Logic Algebra / Comp., red., comm. by B.V. Biryukov, Z.A. Kuzitcheva. – M.: LENAND, 2015. – 264 p.